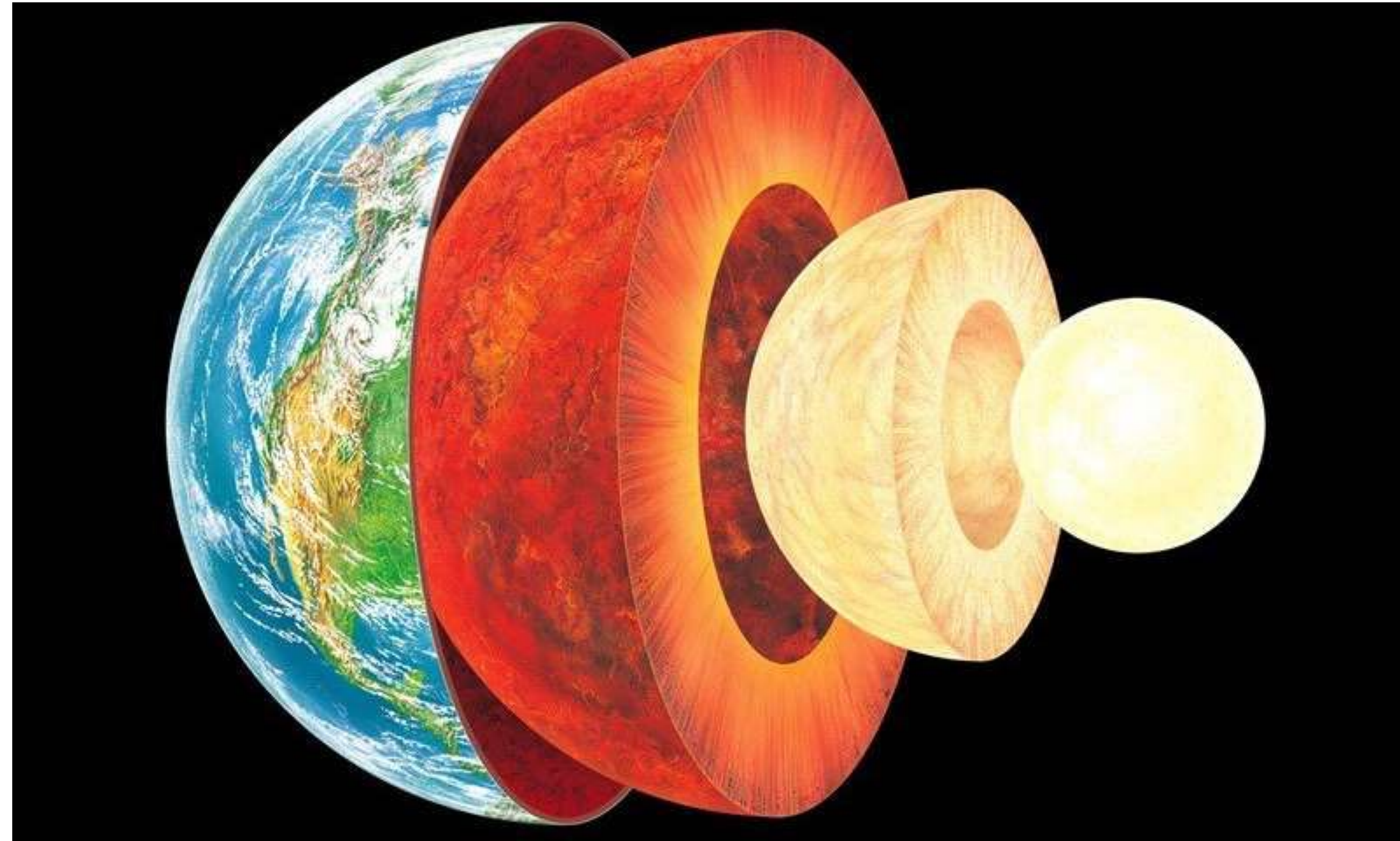


地球惑星圏物理学

第4回：惑星内部構造の物理



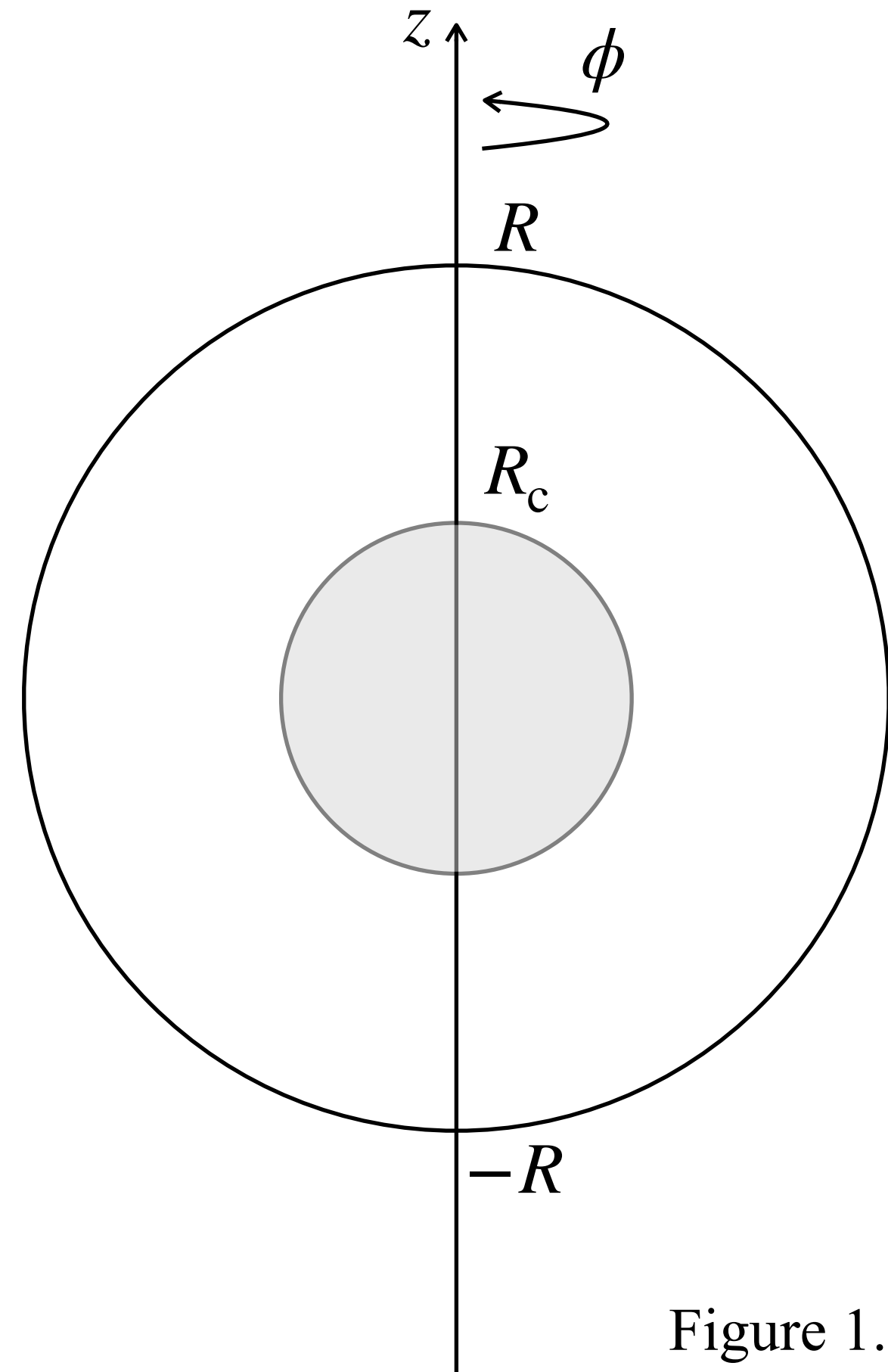
黒川 宏之

東京工業大学 地球生命研究所

hiro.kurokawa@elsi.jp

レポート課題 (4/29 17時締切)

天体半径 R , 質量 M
マントル密度 ρ_m , コア密度 ρ_c

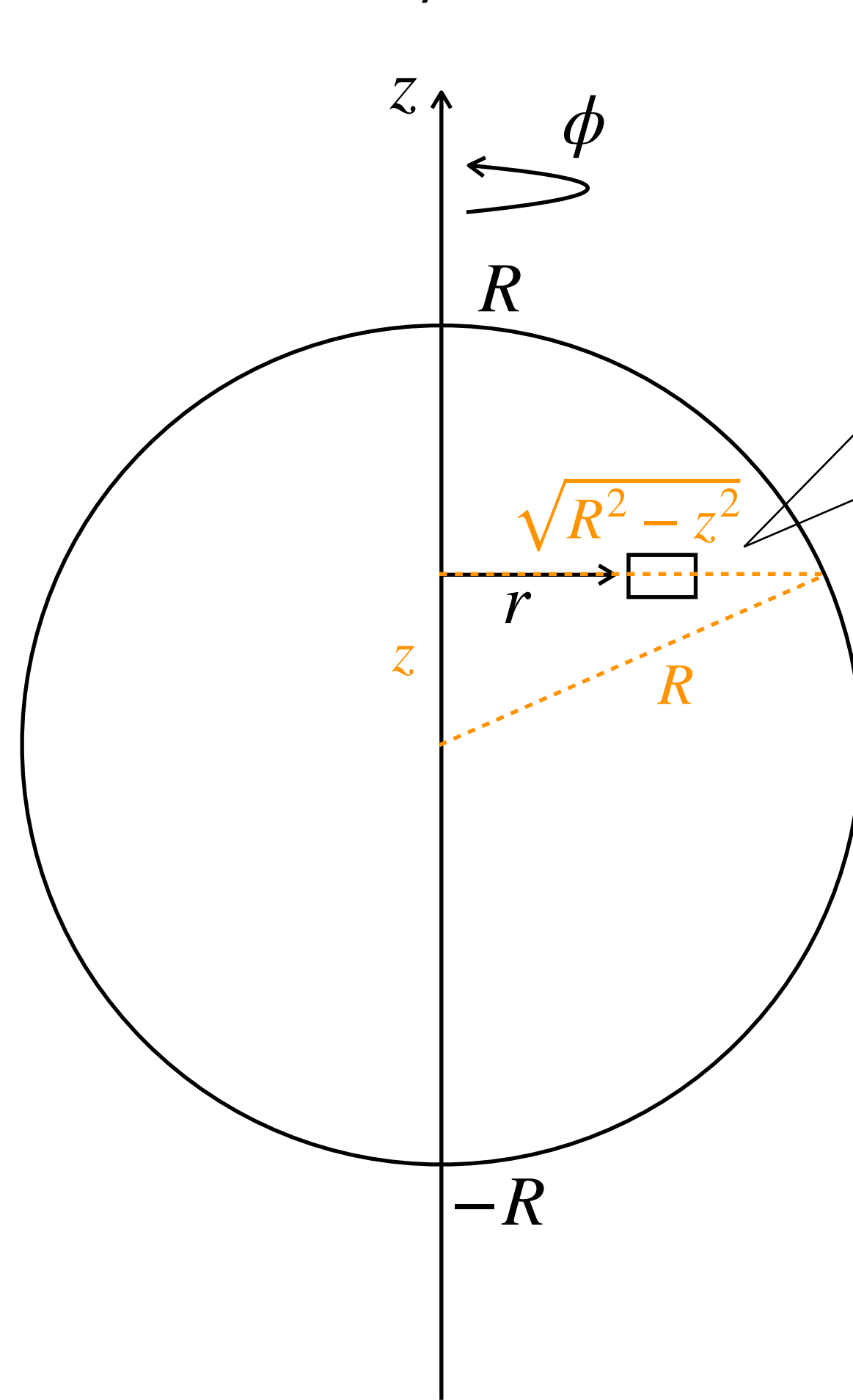


1. 密度一様球の慣性モーメントファクターが0.4であることを示せ.
2. 二層モデルの球 (Figure 1) において,
 $R_c = R/2, \rho_c/\rho_m = 8/3$ (鉄/岩石) とした時,
慣性モーメントファクター $\frac{I}{MR^2}$ を有効数字3桁で計算せよ.

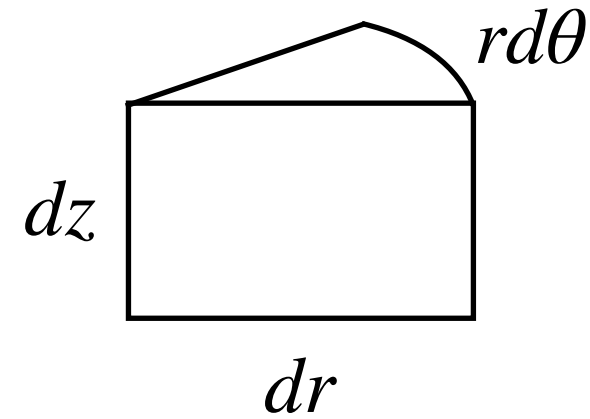
Figure 1. 二層モデルの球状天体

レポート課題 (4/29 17時締切)

天体半径 R , 密度 ρ , 質量 M



質量素片
 dm



質量素片 dm は上の図から,

$$dm = \rho \cdot r dr d\theta dz \quad \text{--- (1)}$$

円筒座標系において, $I \equiv \int r^2 dm$ --- (2) より,

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} r^2 \cdot \rho r dr dz d\phi = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 \quad \text{--- (3)}$$

$$\therefore \text{MoI} = \frac{I}{4\pi\rho R^5/3} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad \text{--- (4)}$$

レポート課題 (4/29 17時締切)

天体半径 R , 質量 M

マントル密度 ρ_m , コア密度 ρ_c

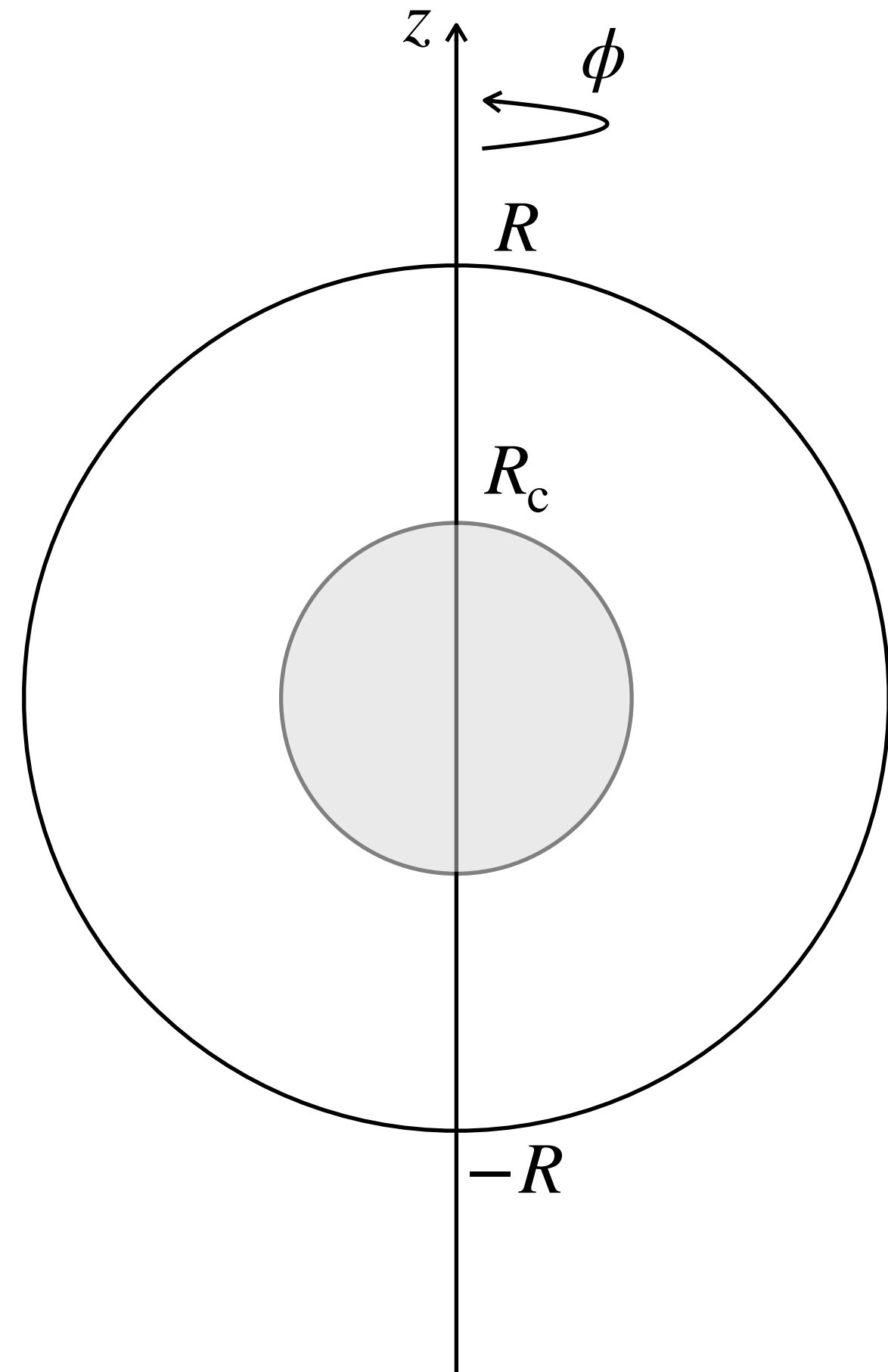


Figure 1. 二層モデルの球状天体

マントル, コアそれぞれの慣性モーメント I_m, I_c は,

$$I_m = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho_m - \frac{8}{15}\pi R_c^5 \rho_m \quad (1), \quad I_c = \frac{8}{15}\pi R_c^5 \rho_c \quad (2).$$

天体質量 M は,

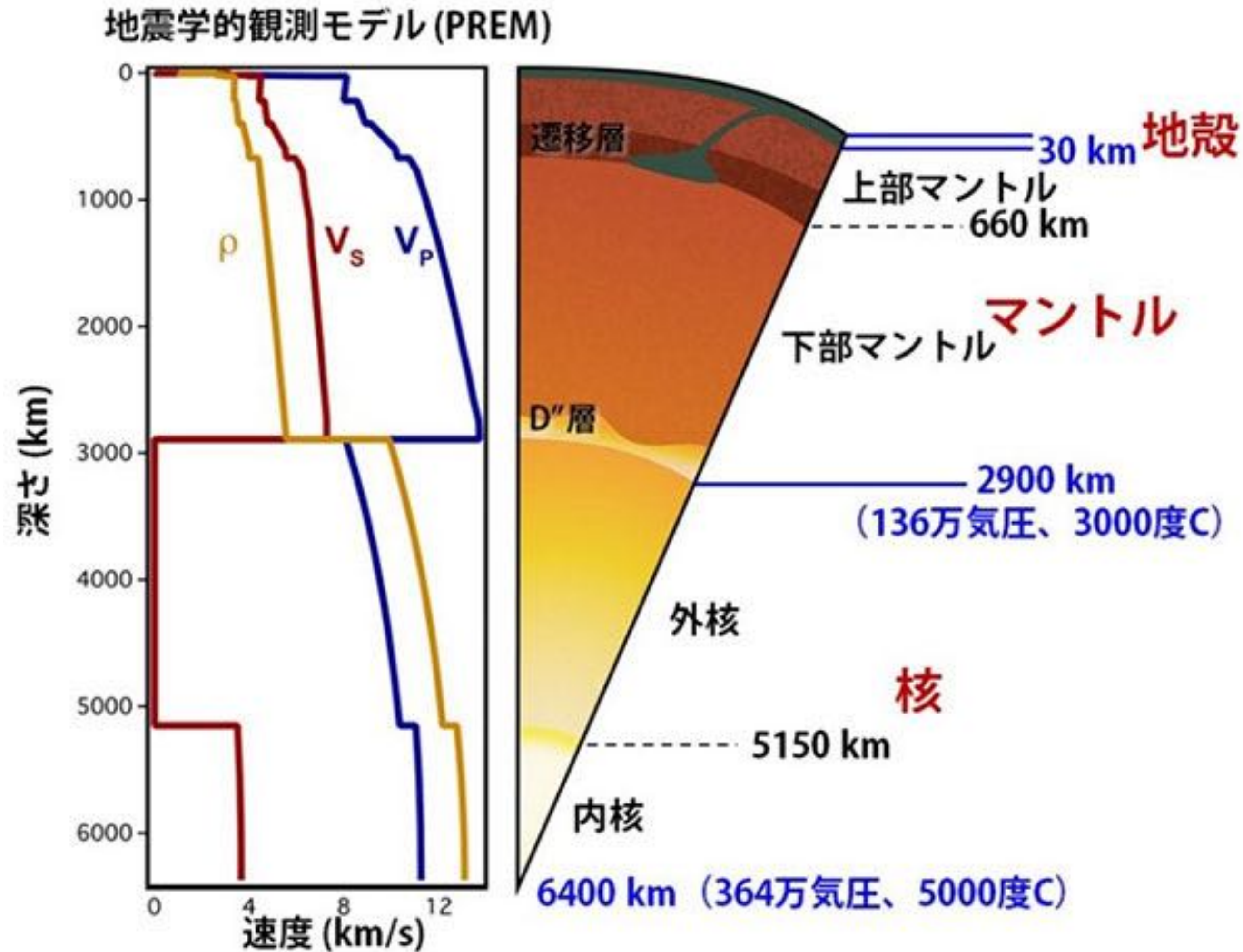
$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m - \frac{4}{3}\pi R_c^3 \rho_m + \frac{4}{3}\pi R_c^3 \rho_c \quad (3)$$

(1)-(3)より慣性モーメントファクターは,

$$\text{MoI} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1 + \left(\frac{R_c}{R}\right)^5 \left(\frac{\rho_c}{\rho_m} - 1\right)}{1 + \left(\frac{R_c}{R}\right)^3 \left(\frac{\rho_c}{\rho_m} - 1\right)} \quad (4)$$

(4) に数値を代入して, $\text{MoI} \simeq 0.348$

内部構造の物理モデル



惑星内部の内部構造

構成物質・圧力・密度・温度

前回 → 観測的な推定

今回 → 物理の理論モデルで記述

球対称構造モデル：静水圧平衡の式

体積素片にかかる力の釣り合いを考える。

$$\text{圧力勾配力 } p(r)A - p(r + dr)A = -\frac{dp}{dr}dr \cdot A \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{重力 } -\rho A dr \cdot g(r) = -\rho A dr \cdot \frac{GM_r}{r^2} \quad \text{--- (2)}$$

(1) + (2) = 0 より、

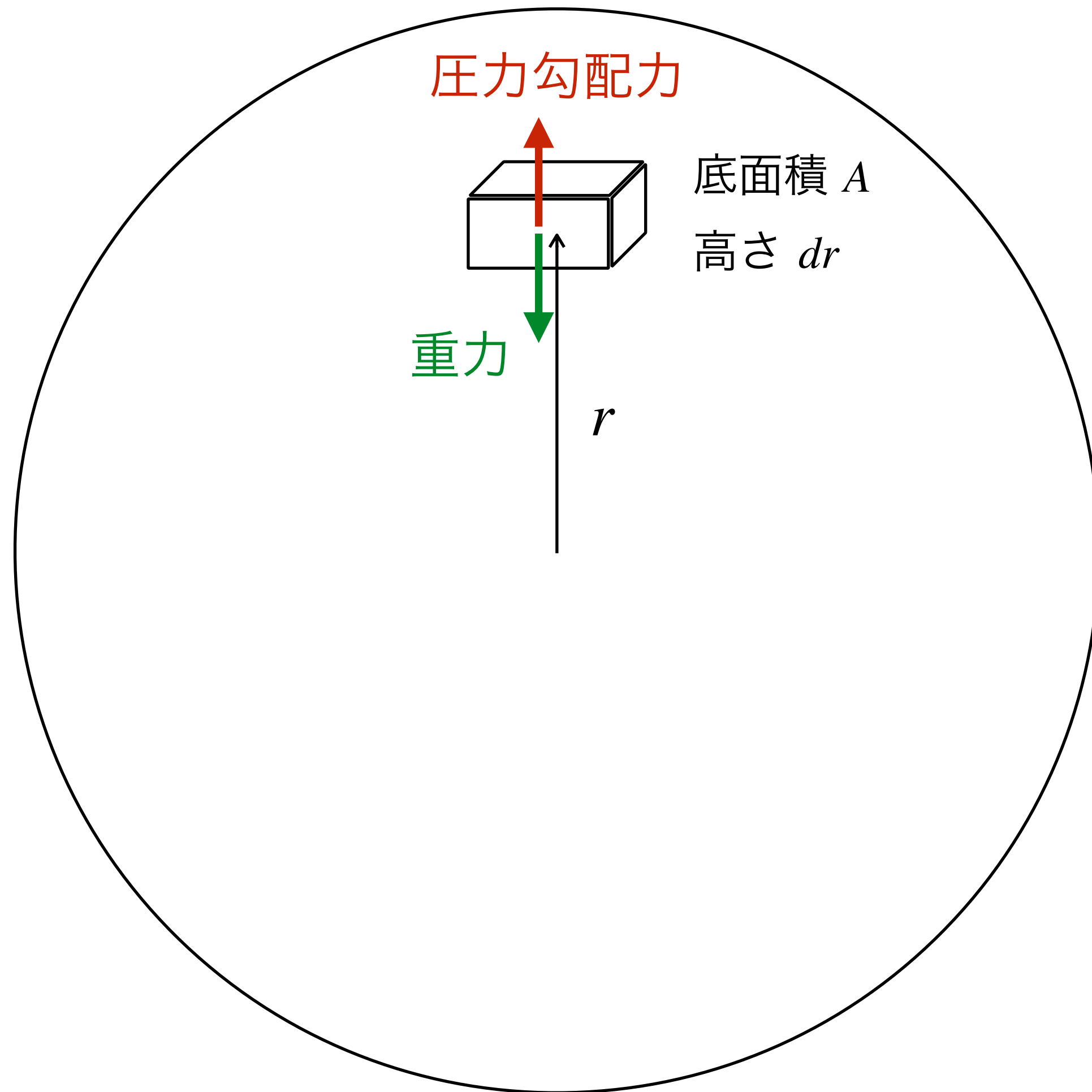
$$\text{静水圧平衡の式 } \frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \quad \text{--- (3)}$$

p : 圧力, ρ : 密度, g : 座標 r での重力加速度,

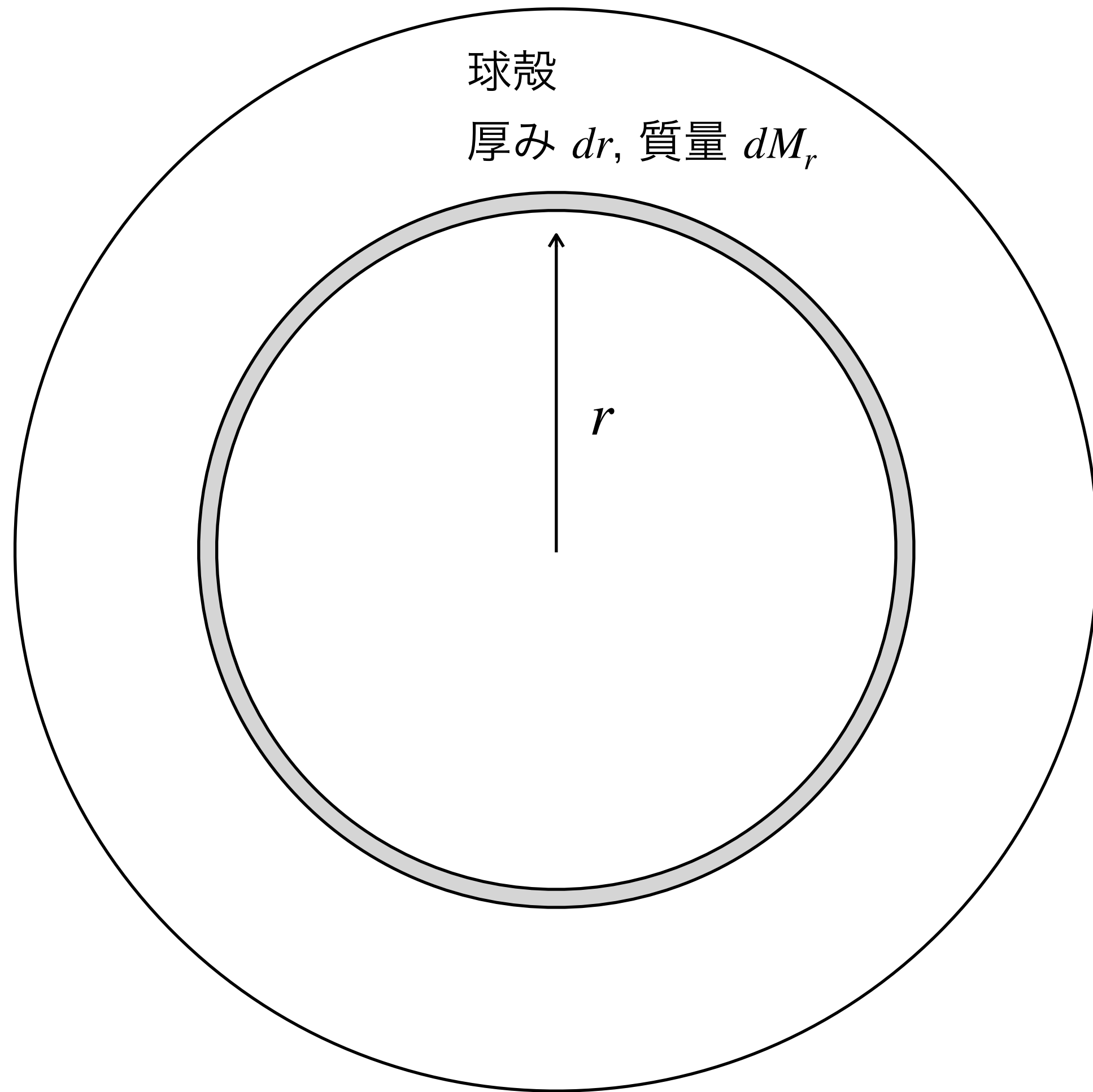
$M_r(r)$: 半径 r 内部の質量.

例) 海水中の圧力変化

$$\frac{dp}{dr} = -10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 9.8 \text{ m s}^{-2} \simeq -10^4 \text{ Pa m}^{-1} \simeq -1 \text{ 気圧}/10 \text{ m} \quad \text{--- (4)}$$



球対称構造モデル：質量保存の式



球殻の質量 dM_r は,

$$dM_r = 4\pi r^2 dr \cdot \rho \quad \text{— (1)}$$

$$\therefore \text{質量保存の式} \quad \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{— (2)}$$

球対称構造モデルの基礎方程式

$$\text{静水圧平衡の式 } \frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{質量保存の式 } \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{状態方程式 } p = f(\rho, T) \quad \text{--- (3)}$$

$$\text{エネルギー輸送の式 } \frac{dT}{dr} = -\min\left(\left|\left(\frac{dT}{dr}\right)\right|_{\text{cond}}, \left|\left(\frac{dT}{dr}\right)\right|_{\text{rad}}, \left|\left(\frac{dT}{dr}\right)\right|_{\text{conv}}\right) \quad \text{--- (4)}$$

一般には $M_r(r)$, $p(r)$, $\rho(r)$, $T(r)$ について (1)-(4) を解くが、

固体天体については状態方程式が $p \simeq f(\rho)$ と近似でき、(1)-(3) で方程式が閉じる。

∴ マントル鉱物の体積膨張率 $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1} \rightarrow \sim 10^3 \text{ K}$ の温度変化での体積変化 $\sim 1\%$

補足：岩石天体の冷却の影響

冷却収縮による水星の断層: Discovery Rupes (~650 km)

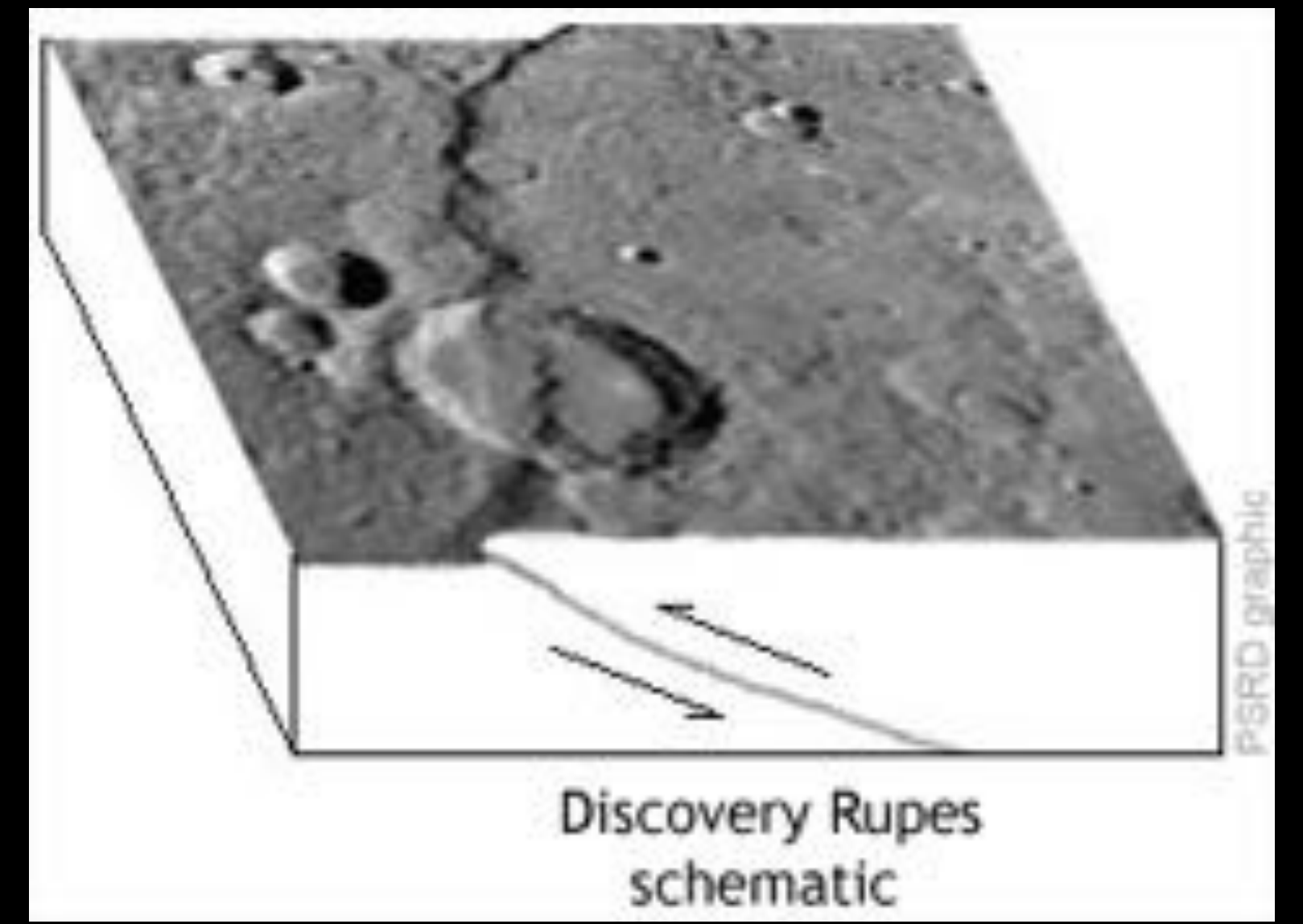
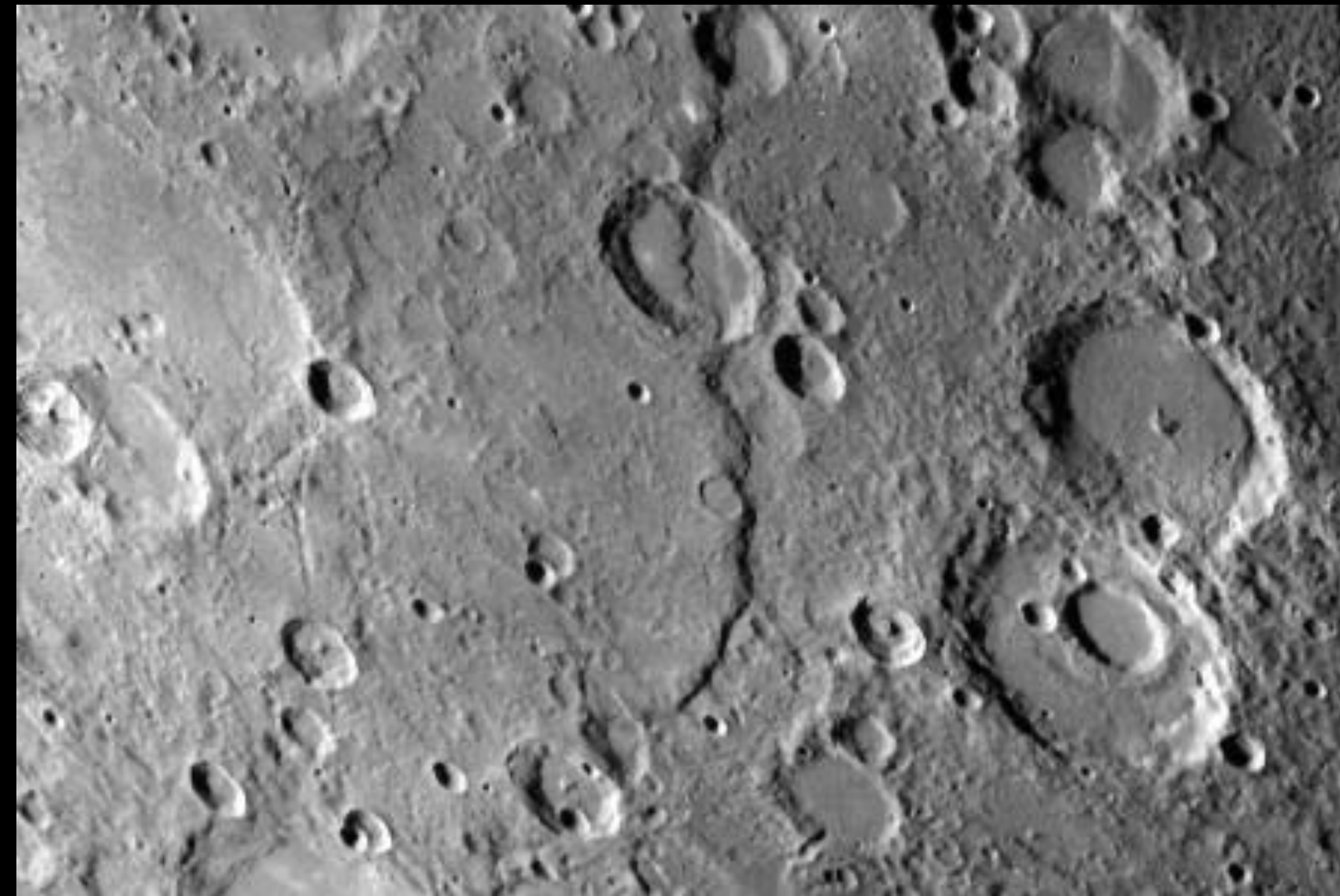
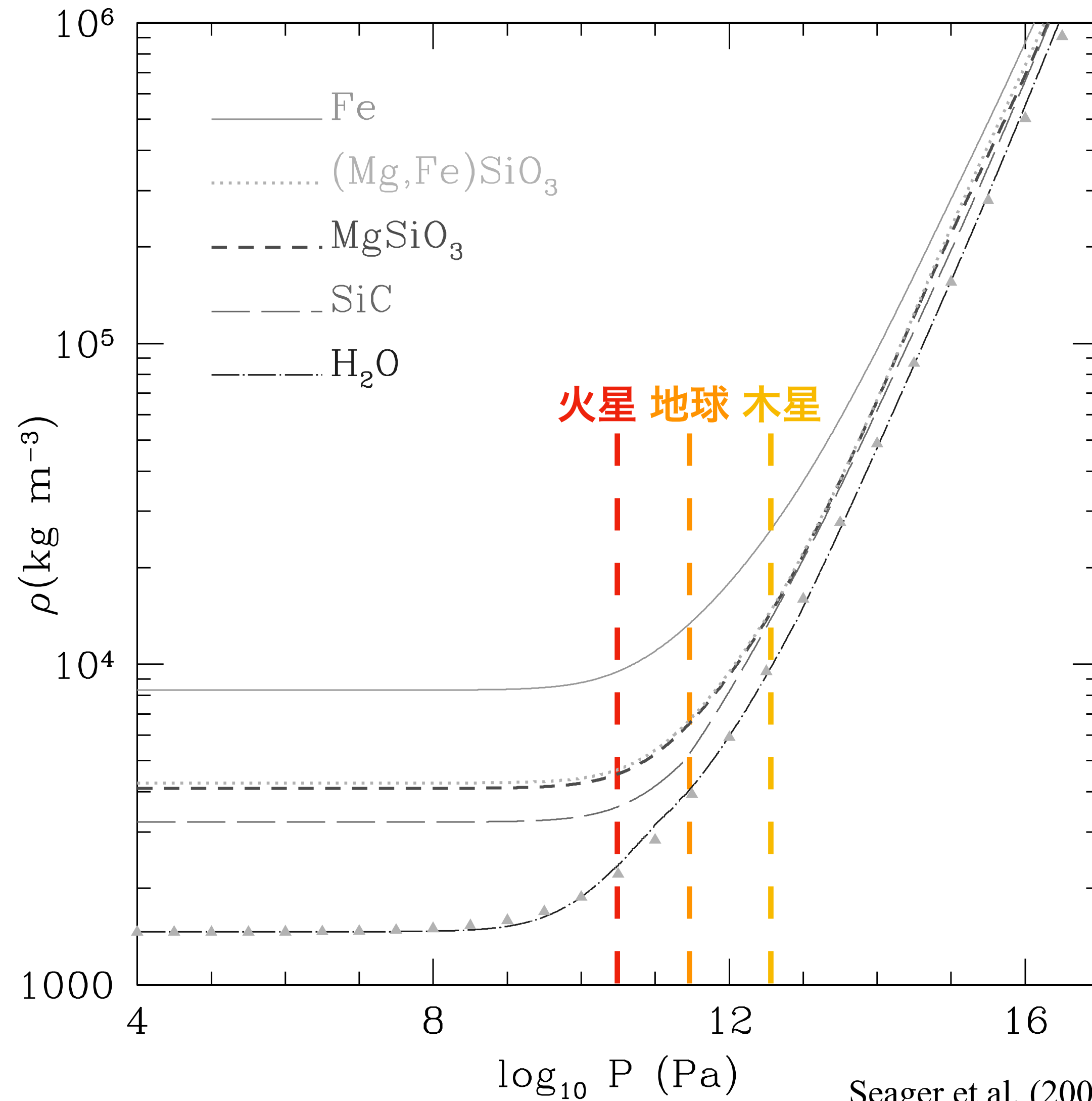


Image credit: NASA/JPL/Northwestern University

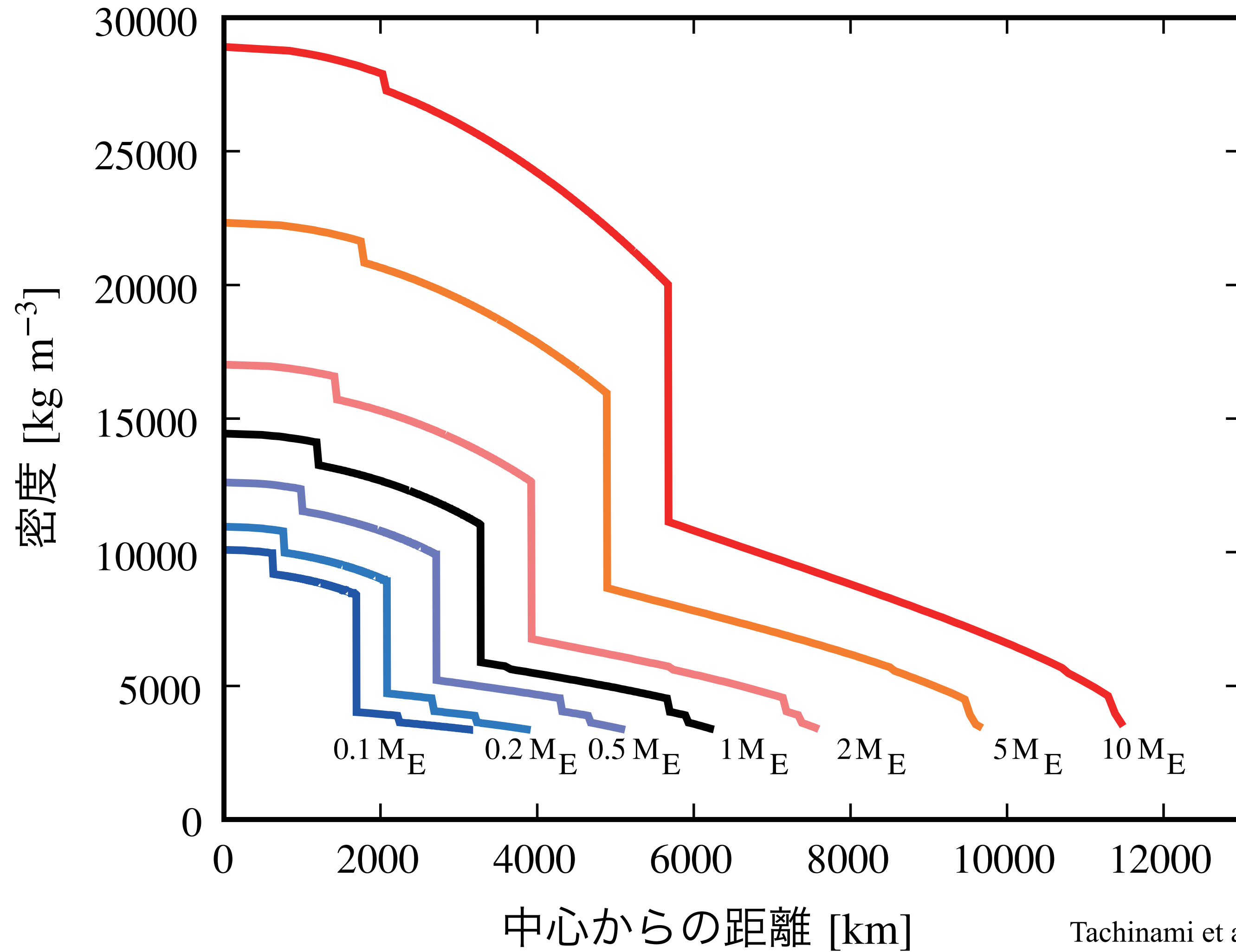
固体の状態方程式



Seager et al. (2007) *Astrophys. J.*

- 火星サイズ以下：密度一定
- 火星サイズ以上：自重による圧縮

球対称内部構造モデル：地球組成天体



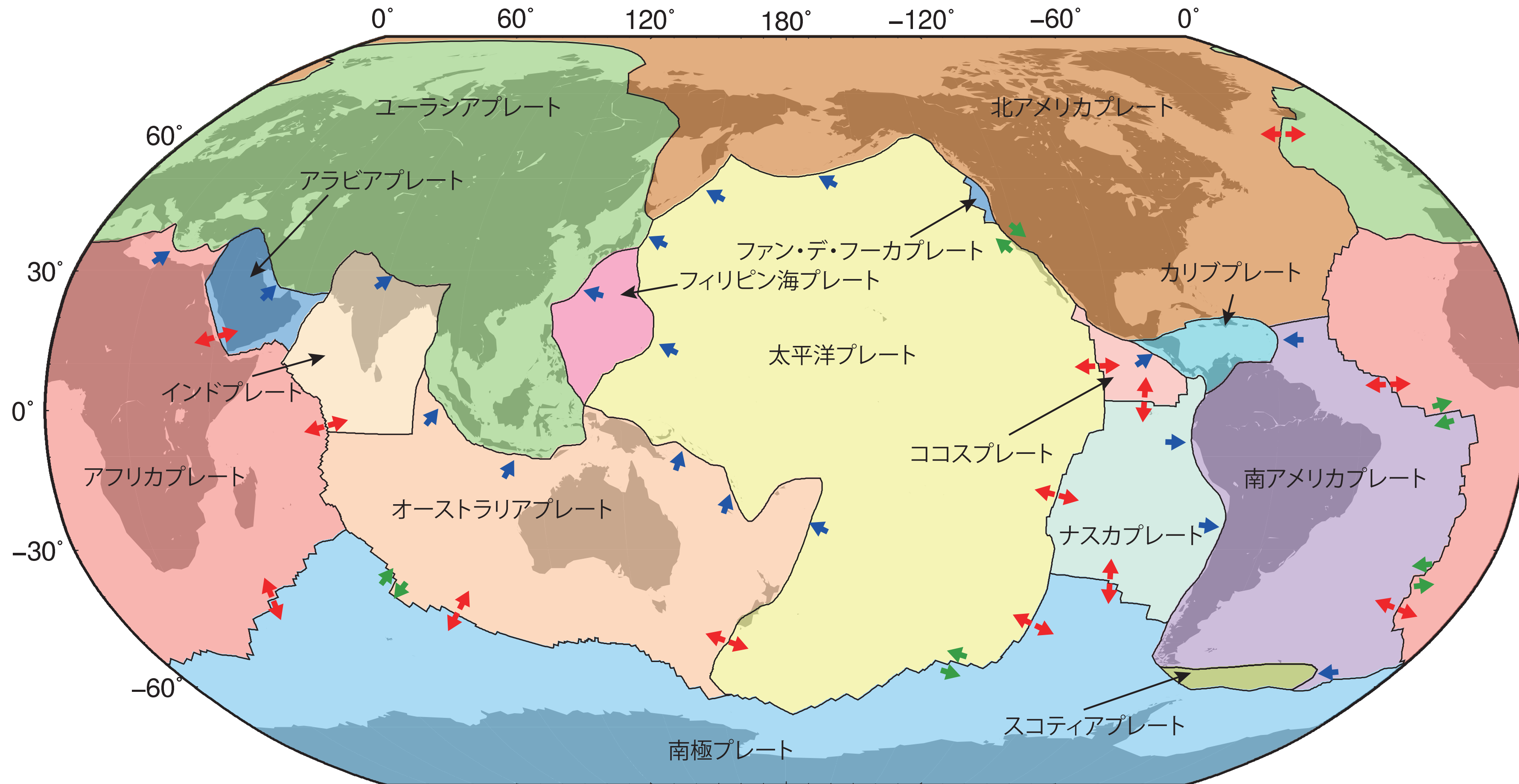
惑星サイズ大

→ 圧力・密度大

→ 下部マントル領域の拡大

Tachinami et al. (2011) *Astrophys J.*

プレート・テクトニクス

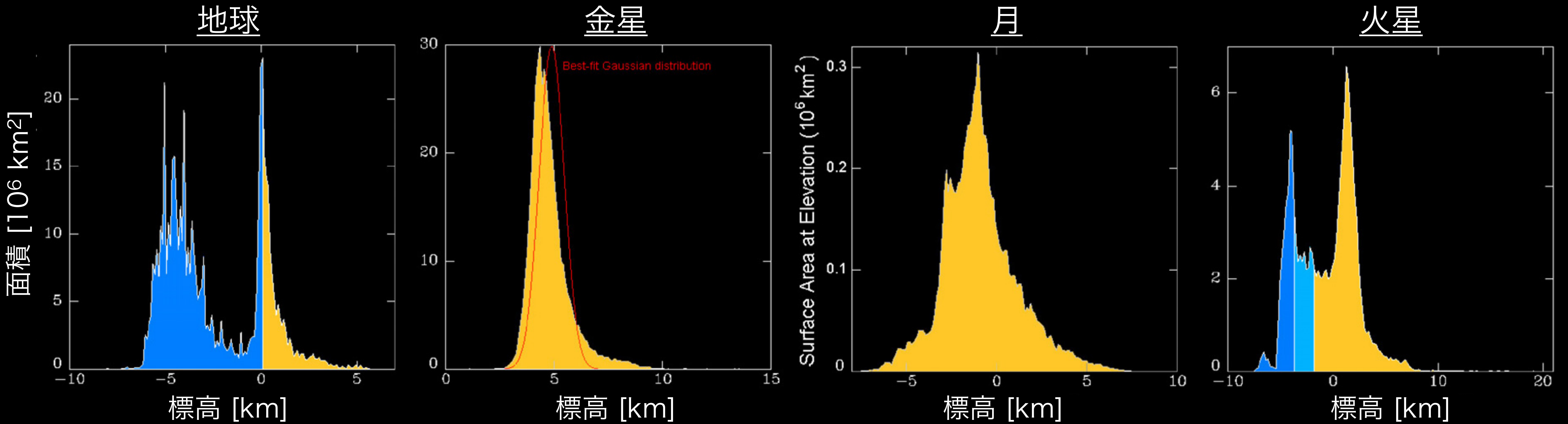


中久喜先生のウェブページより

https://home.hiroshima-u.ac.jp/nakakuki/plate_mantle/Fig_1_v7.pdf

- プレート：地球を覆う(厚さ数10~200 km)程度の岩盤 (≠ 地殻)
- 海嶺で生成され、海溝で沈み込む → 部分溶融と大陸地殻生成

地球型惑星・月の標高分布

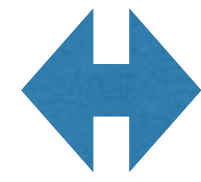


Stoddard & Jurdy (2012) *Icarus*

- 地球：プレートの沈み込みによって軽い大陸地殻が生成 → 標高の二分性
- 金星, 月：二分性なし
- 火星：二分性がある。巨大衝突やマンツルの対流モード(地球より長波長)？

テクトニクス形態

地球：プレート・テクトニクス
(複数のプレートが流動)



太陽系の他の岩石天体：スタグナントリッド
(1枚だけの流動しないプレート)

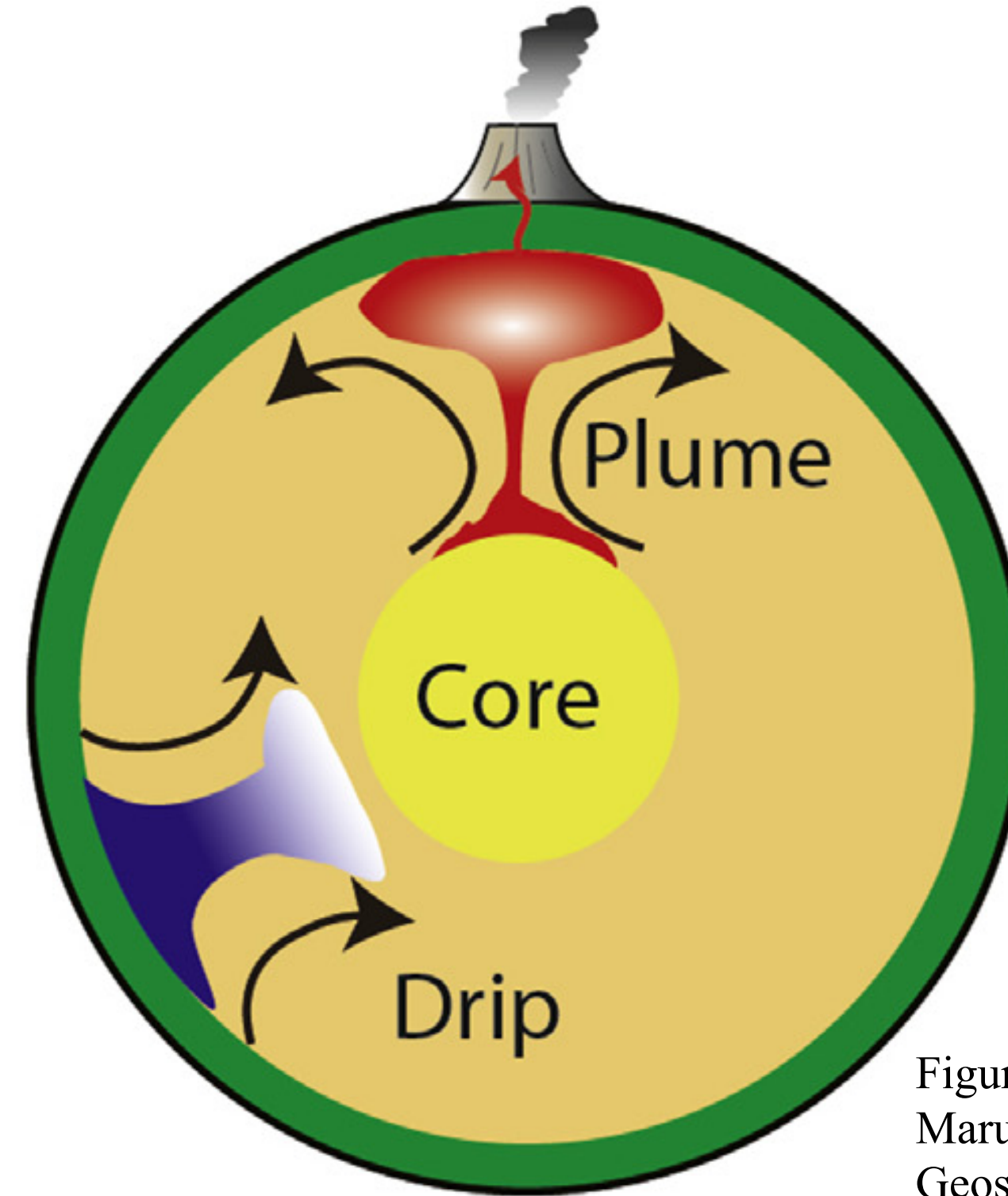
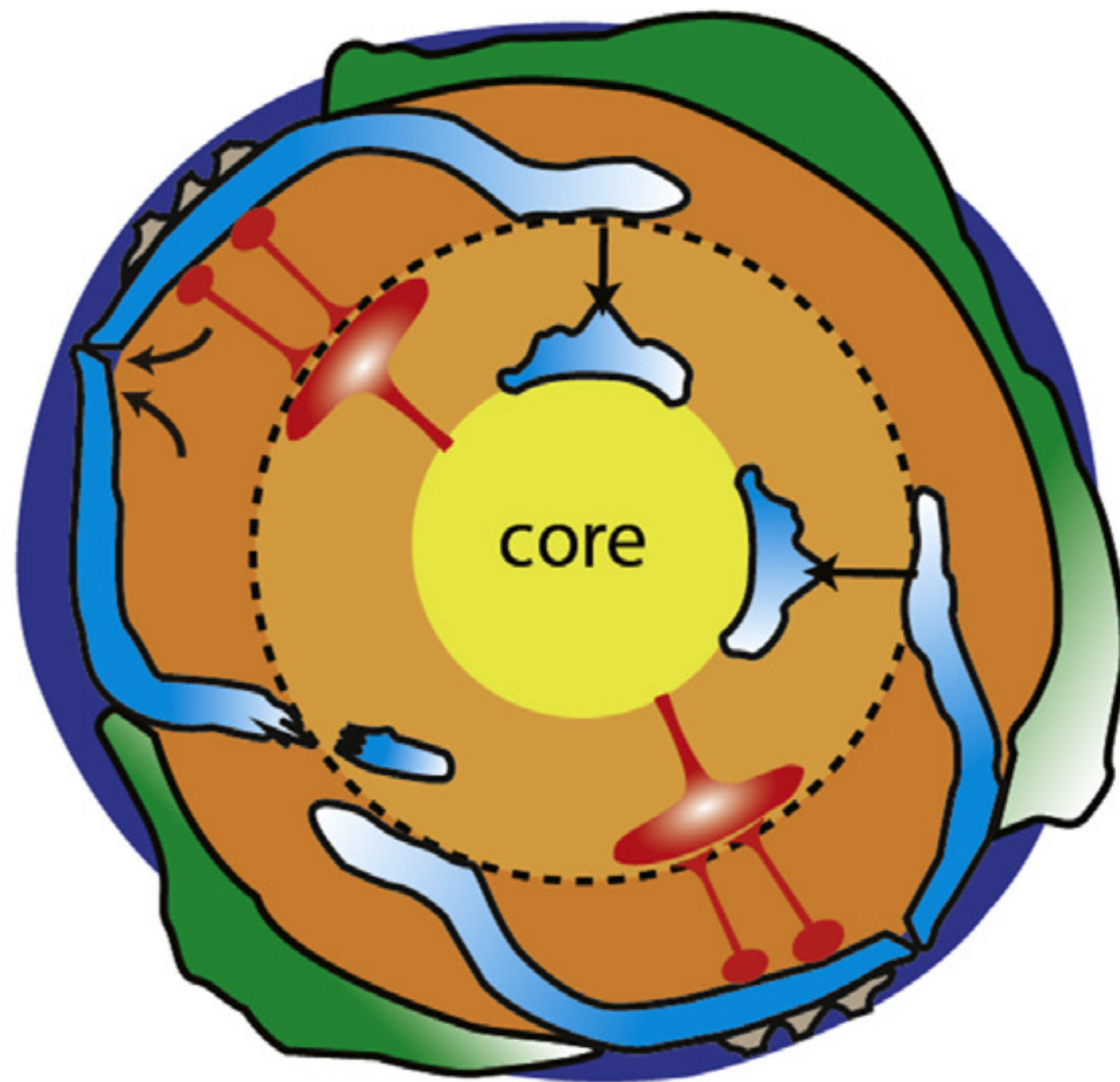
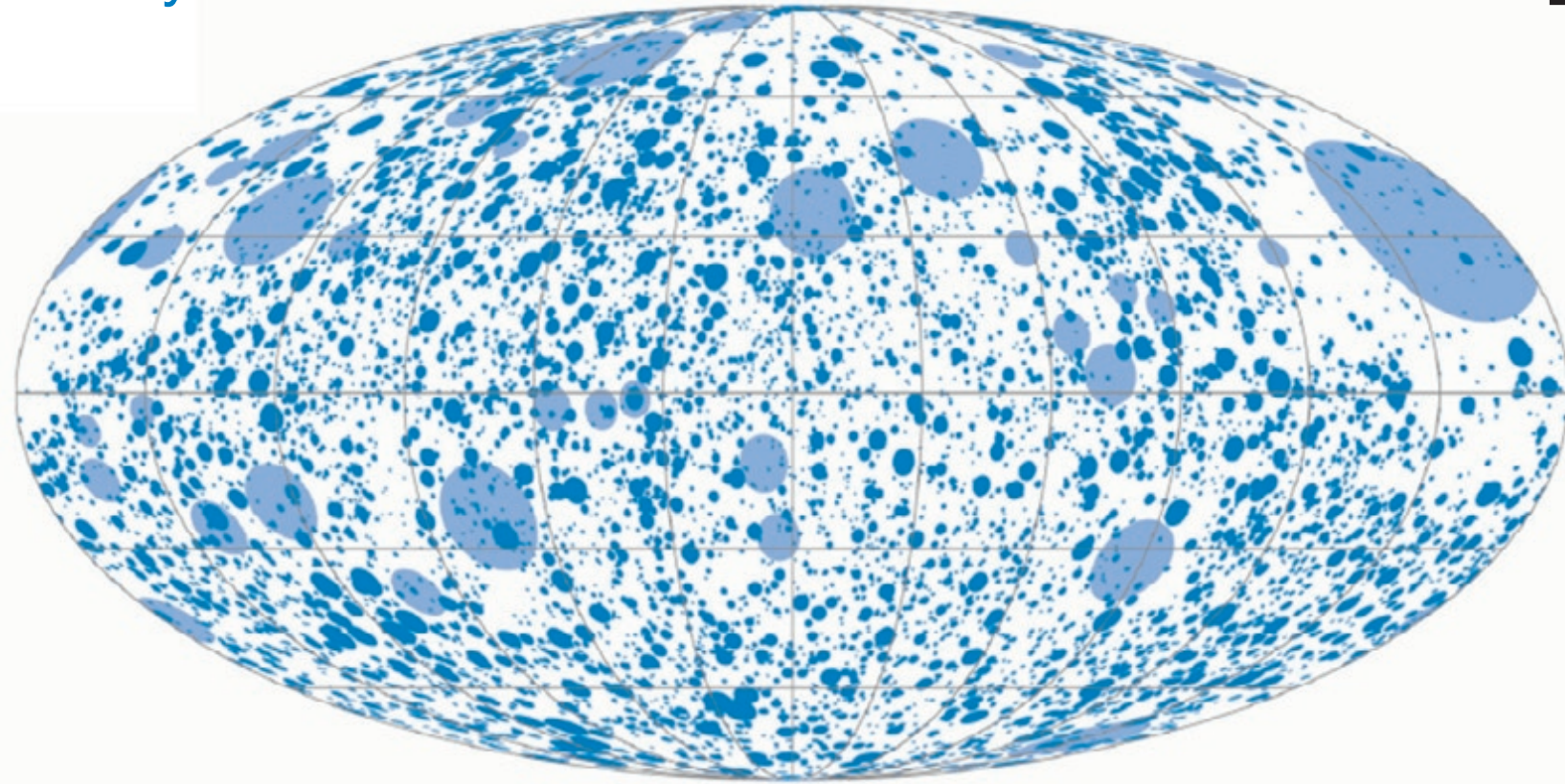


Figure from
Maruyama et al. (2016)
Geoscience Frontiers

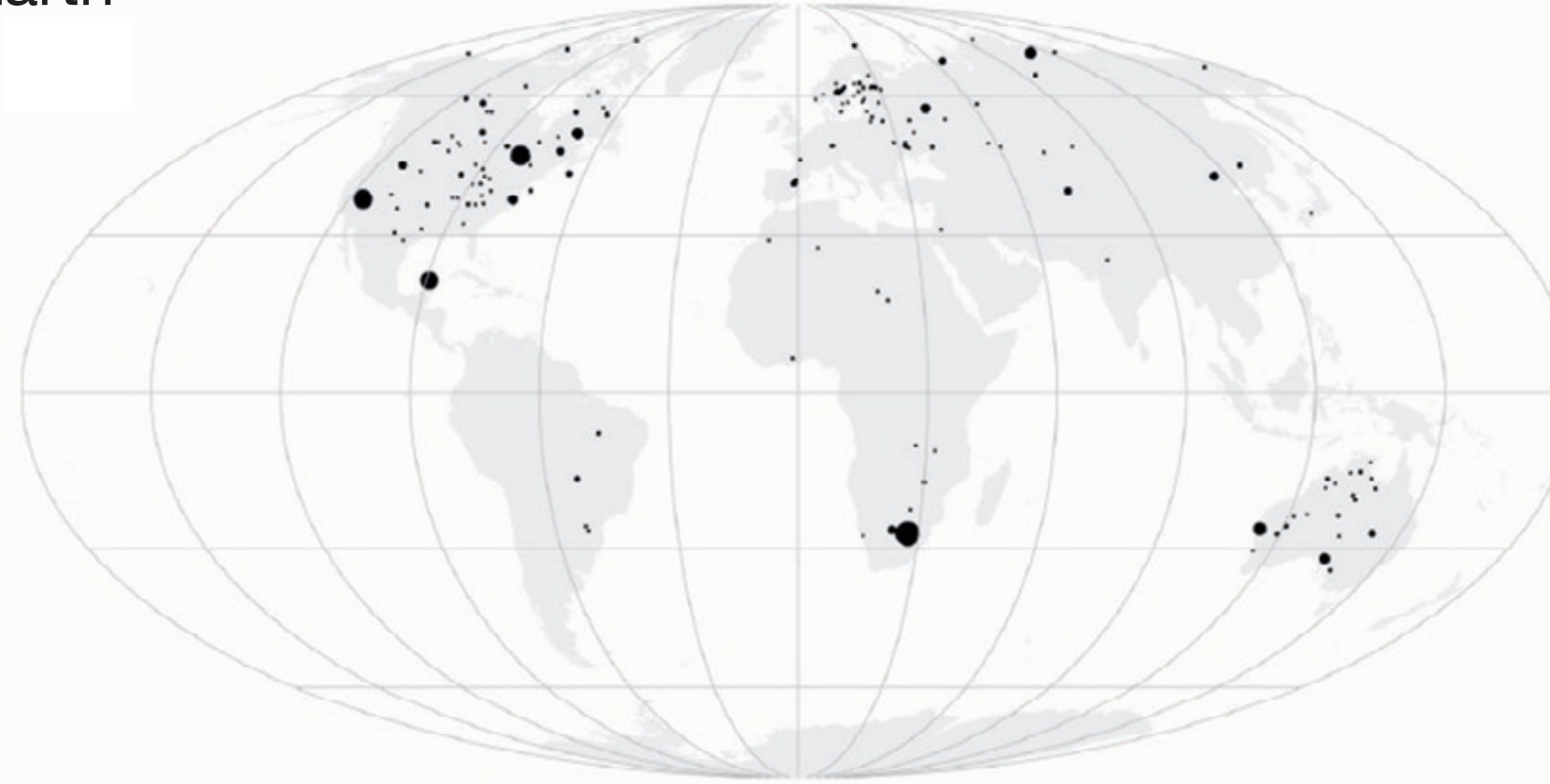
- テクトニクスの違い→惑星表層環境に影響 (**熱史**, 物質循環, 大陸)
- プレート・テクトニクスの発生条件は？

地球型惑星・月のクレーター一分布

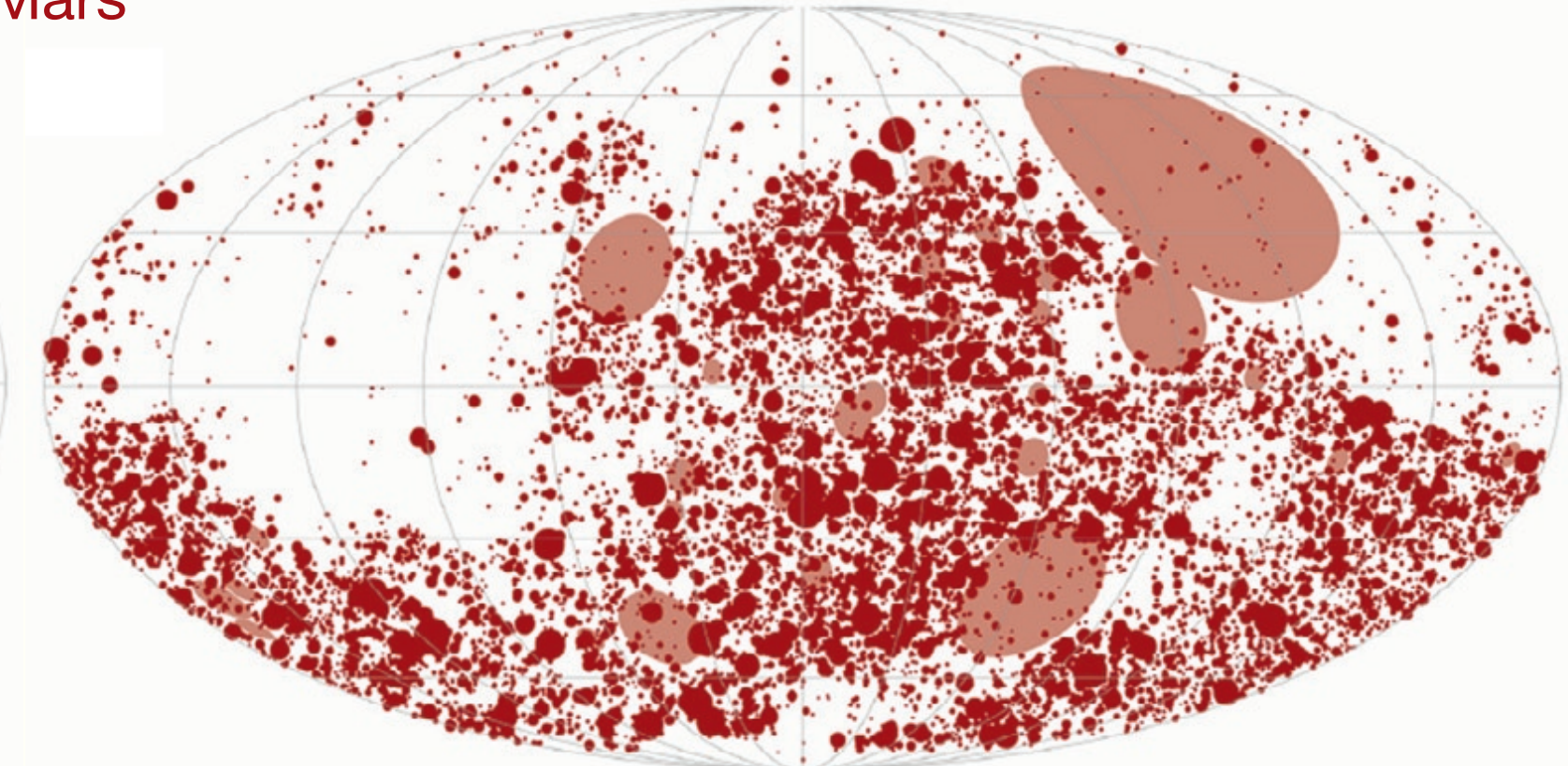
Mercury



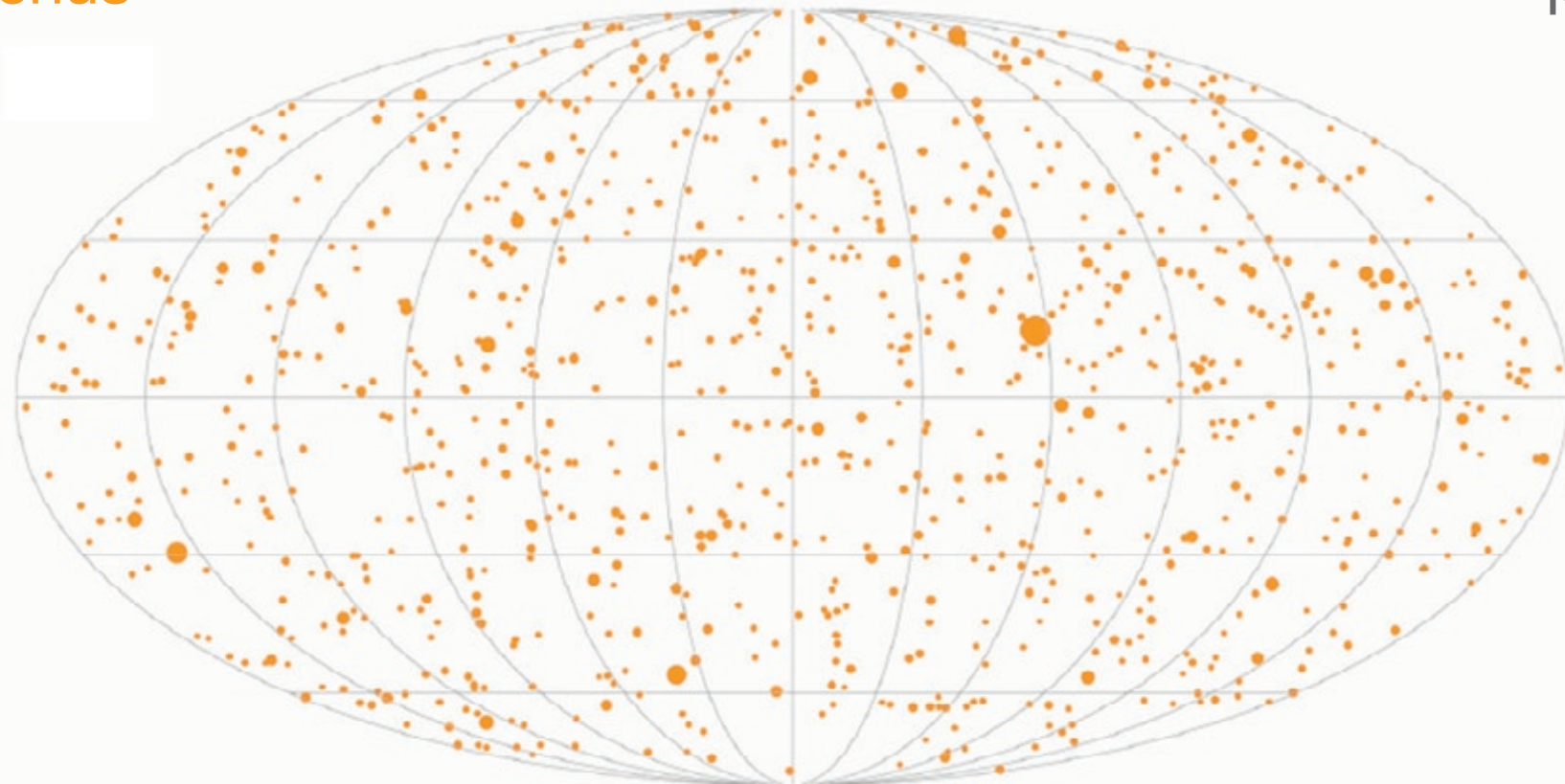
Earth



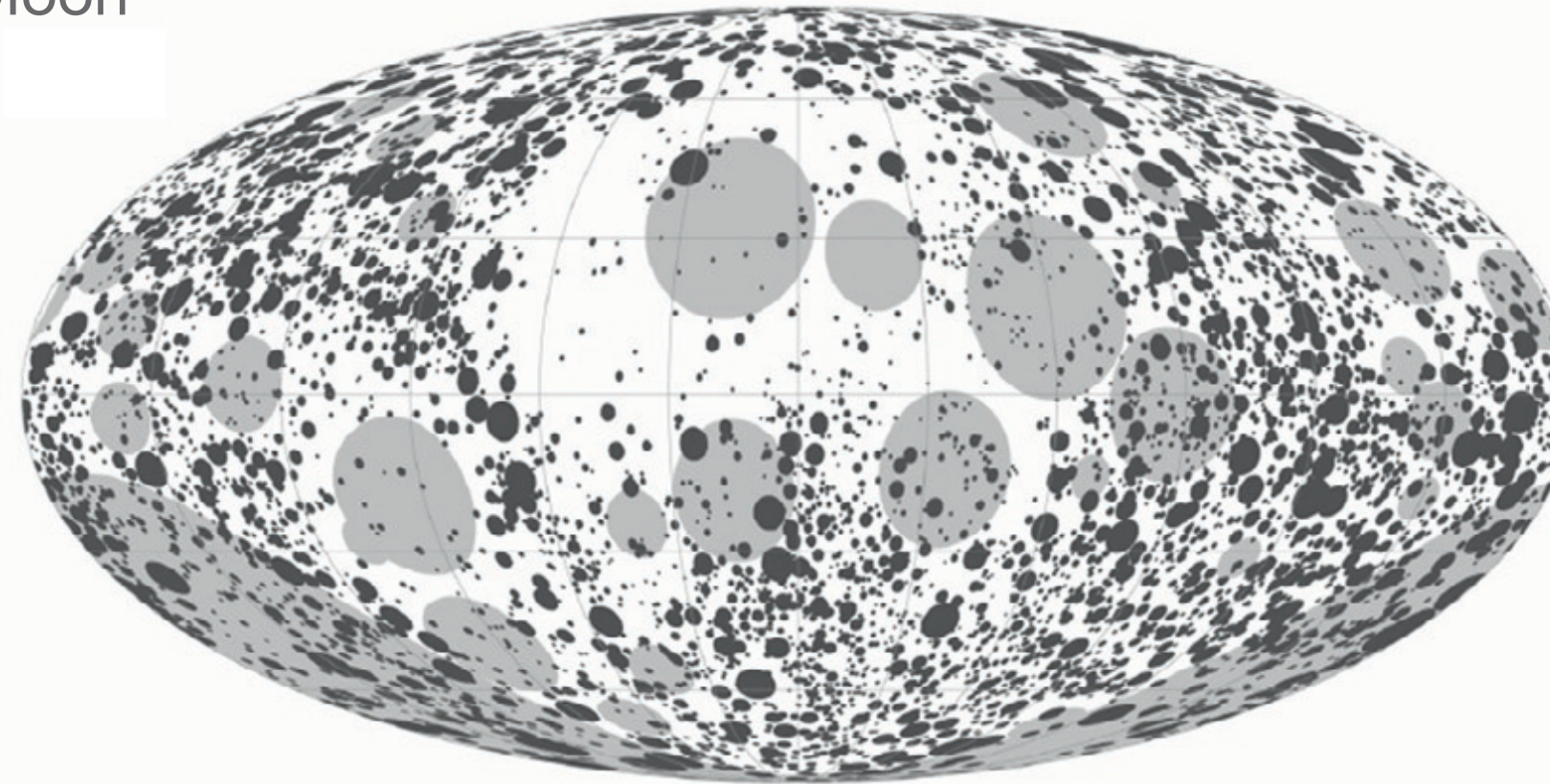
Mars



Venus



Moon



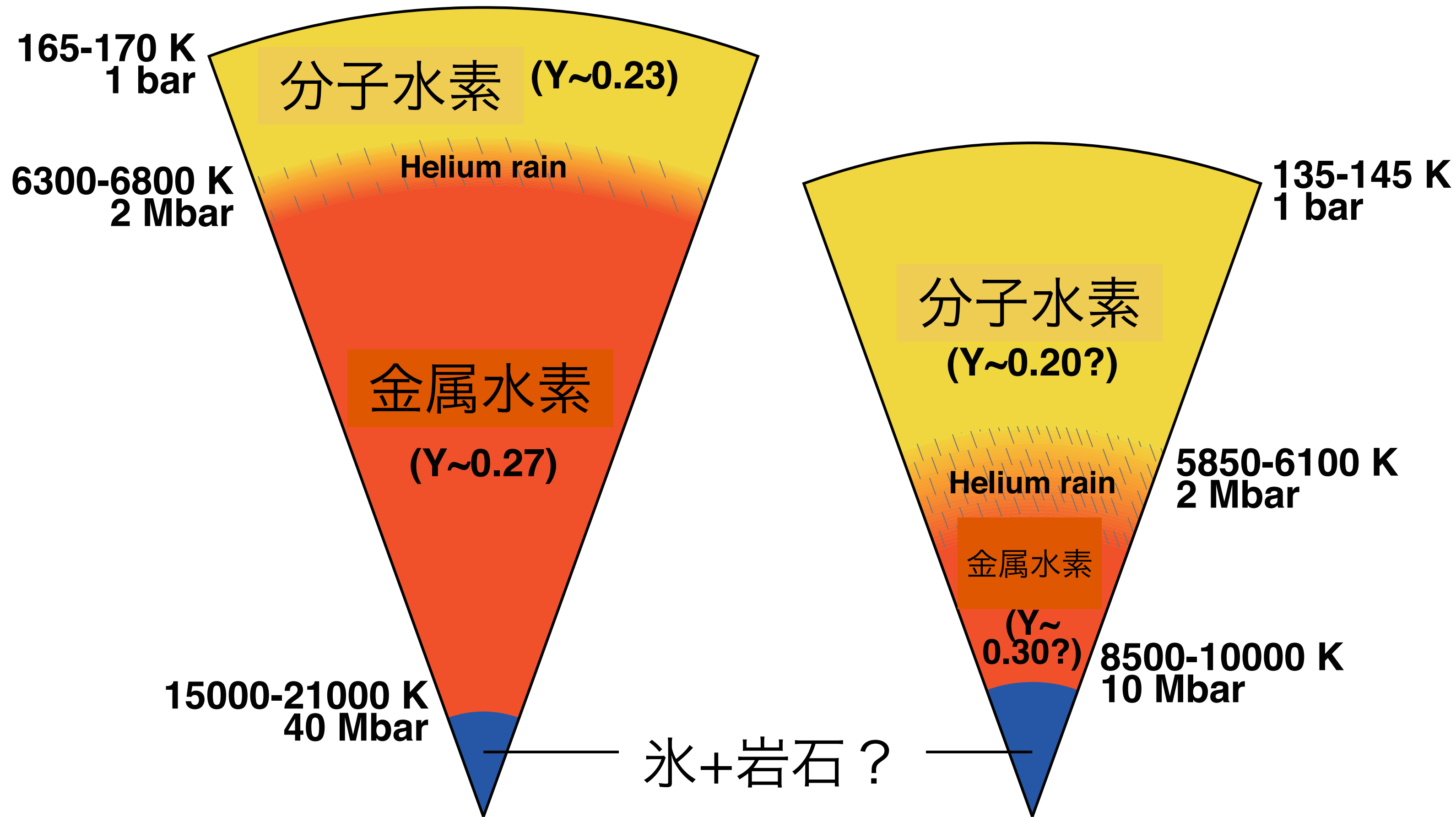
Werner & Ivanov (2015) in *Treatise on Geophysics 2nd Edition*

- クレーター数密度 → 地殻の年齢 (※ 絶対年代測定がされているのは地球・月のみ)
- プレート・テクトニクスのある地球の地殻は明らかに若い

巨大ガス惑星の内部構造

木星

土星

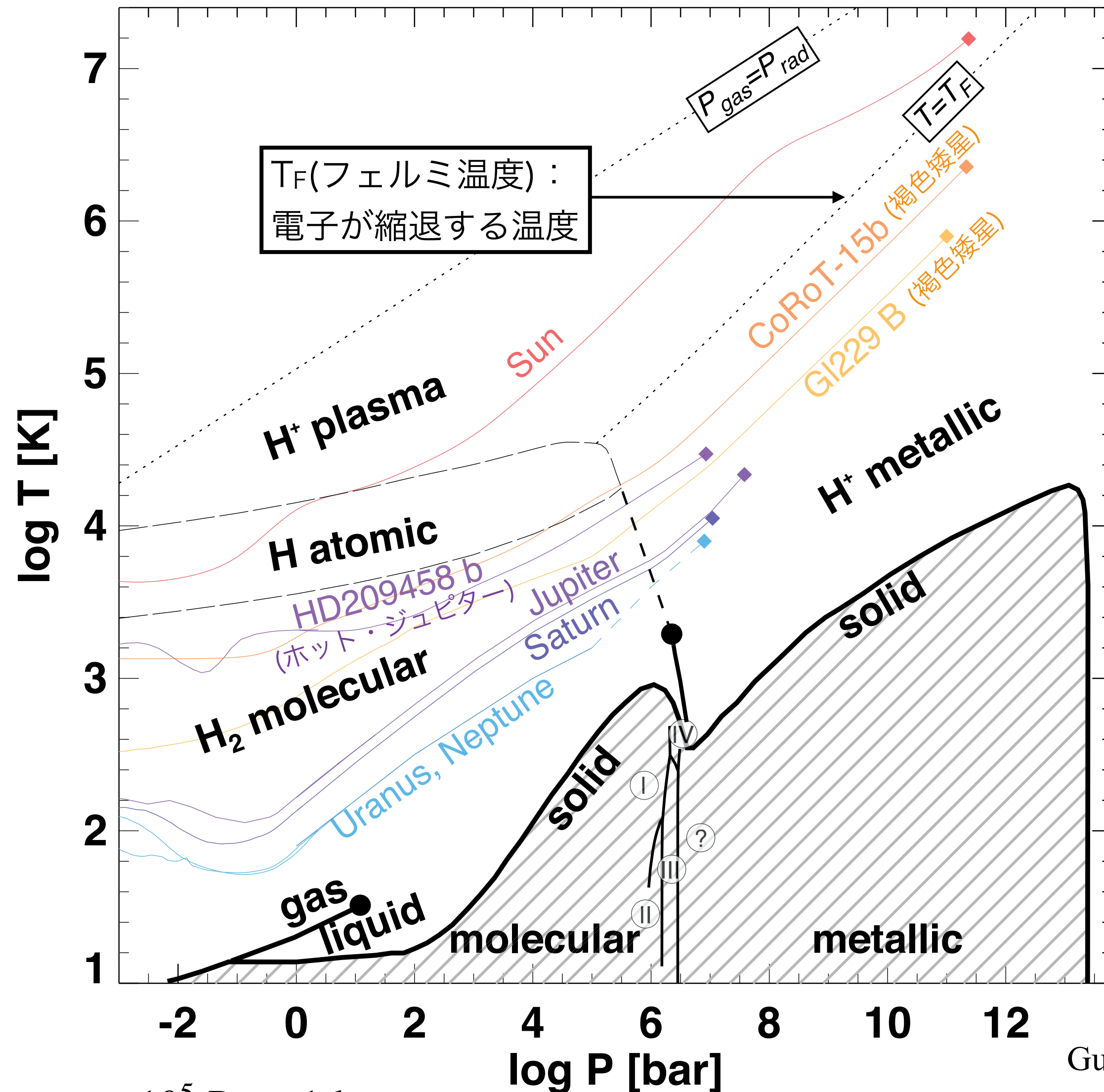


Y: ヘリウムの質量存在度

- H/He主成分のガス層(エンベロップ)
- 岩石/氷のコア
- 大気He存在度 < 円盤ガス (Y=0.28)
→ Heの沈殿 (高圧下でHと不混和)
- 強い双極子磁場
→ 自由電子を持つ金属水素の存在

Guillot & Gautier (2014) in *Treatise in Geophysics*

水素の相平衡図とガス天体の内部



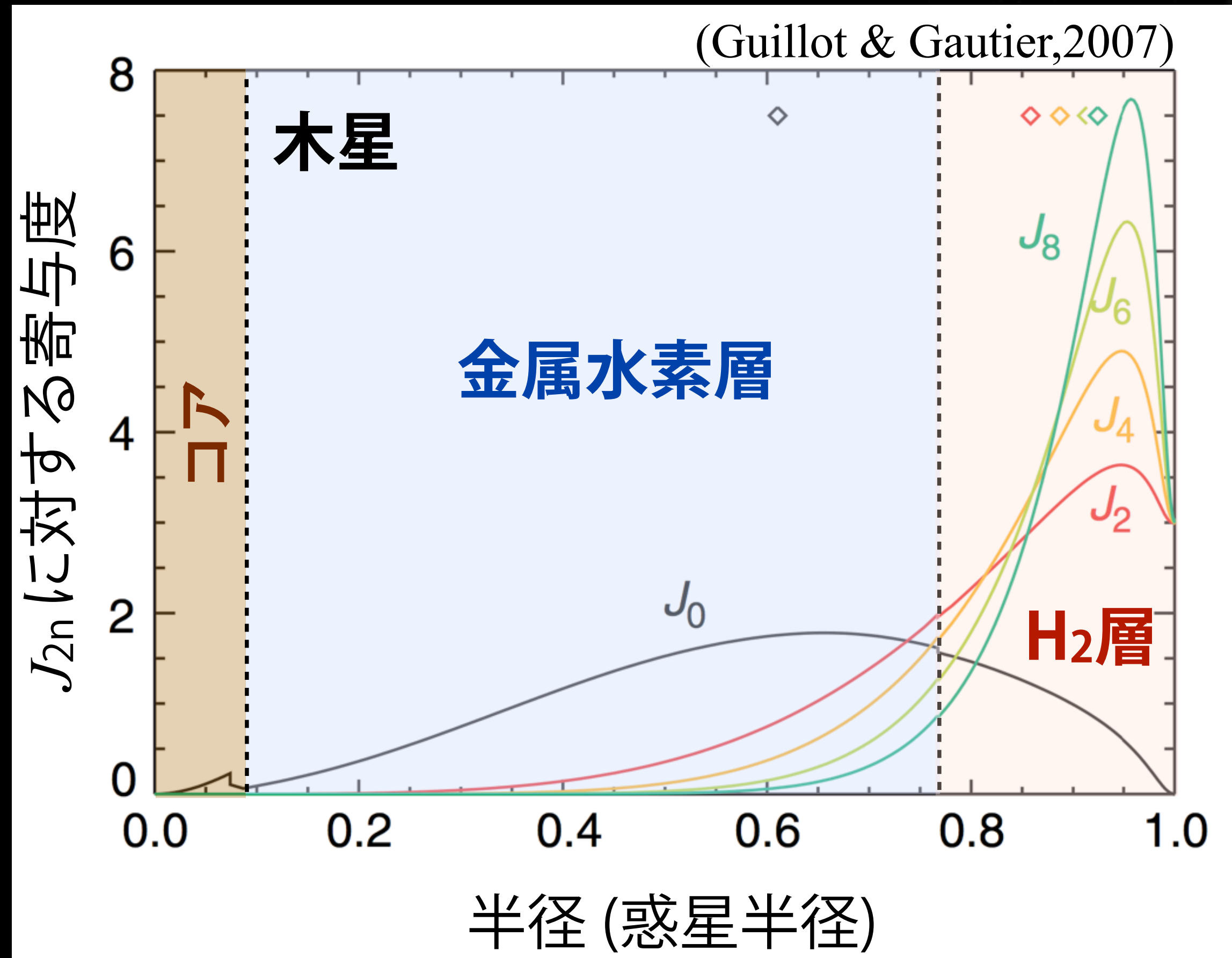
- ≥ 0.8 g/ccの高密度 (~ Mbar 相当)下では
電子エネルギー > イオン化エネルギー
→ 水素が電離 (圧力電離と呼ばれる)
- 巨大ガス惑星の内部温度 (フェルミ温度)
→ 電子が縮退 (**金属水素**)
- 天体の熱進化(冷却)によって内部構造も変化
 - 誕生直後の土星にはまだ金属水素層がない
 - 理論上, 1兆年後には木星深部で水素が固体化

Note: 10^5 Pa = 1 bar

Guillot & Gautier (2014) in *Treatise in Geophysics*

内部構造の密度分布と重力場

木星重力場における各層の寄与



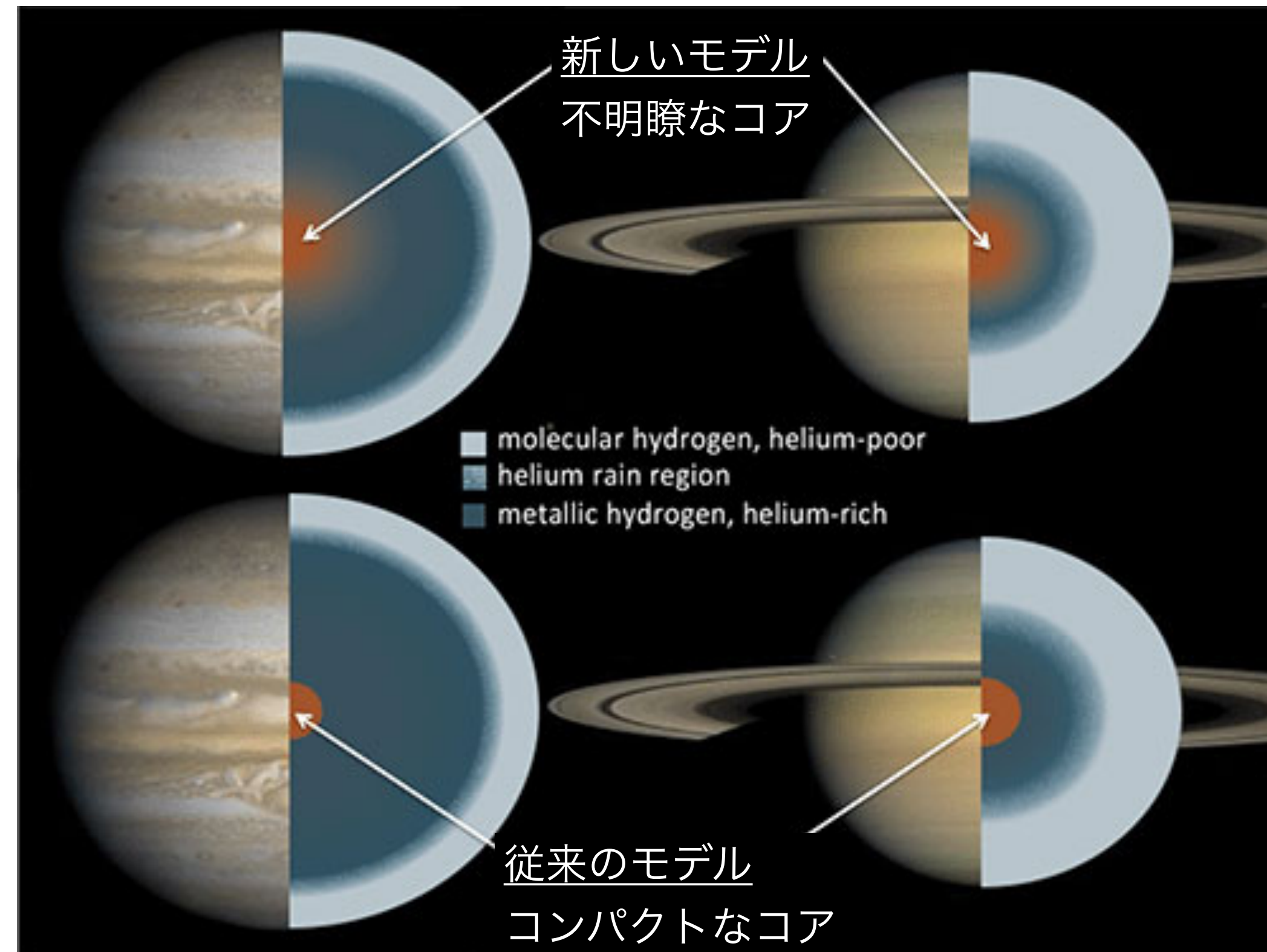
重力場ポテンシャル

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n} \cos \theta \right] \quad (1)$$

最近、木星探査機 Juno によって
高次の係数 $J_2 - J_8$ の精密測定が行われた

新しい内部構造モデル

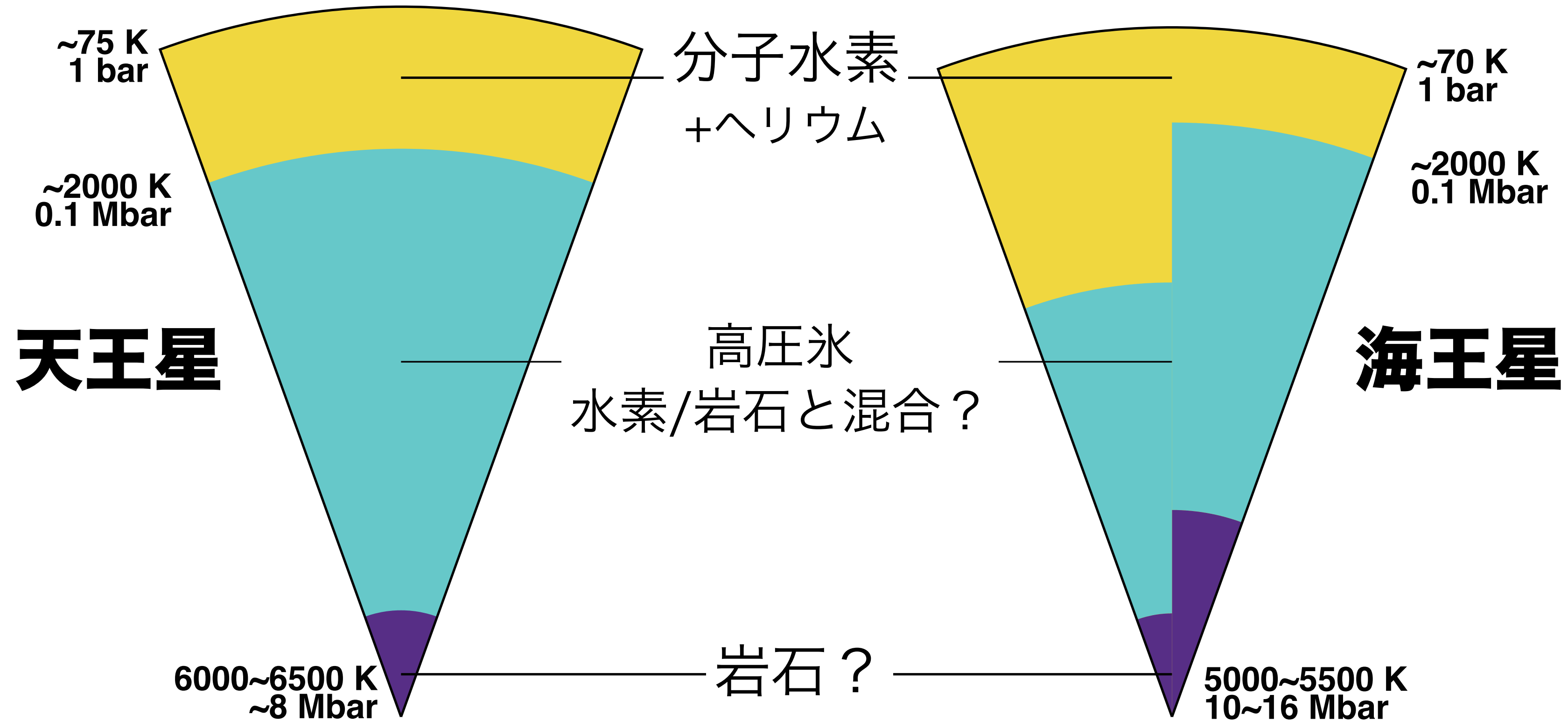
Junoの重力場測定を反映した内部構造モデル



Wahl et al. (2017) *GRL*; Helled (2019) *Oxford Research Encyclopedia of Planetary Science*

- 大きいコアサイズ
- コアとエンベロープの境界は不明瞭かもしれない

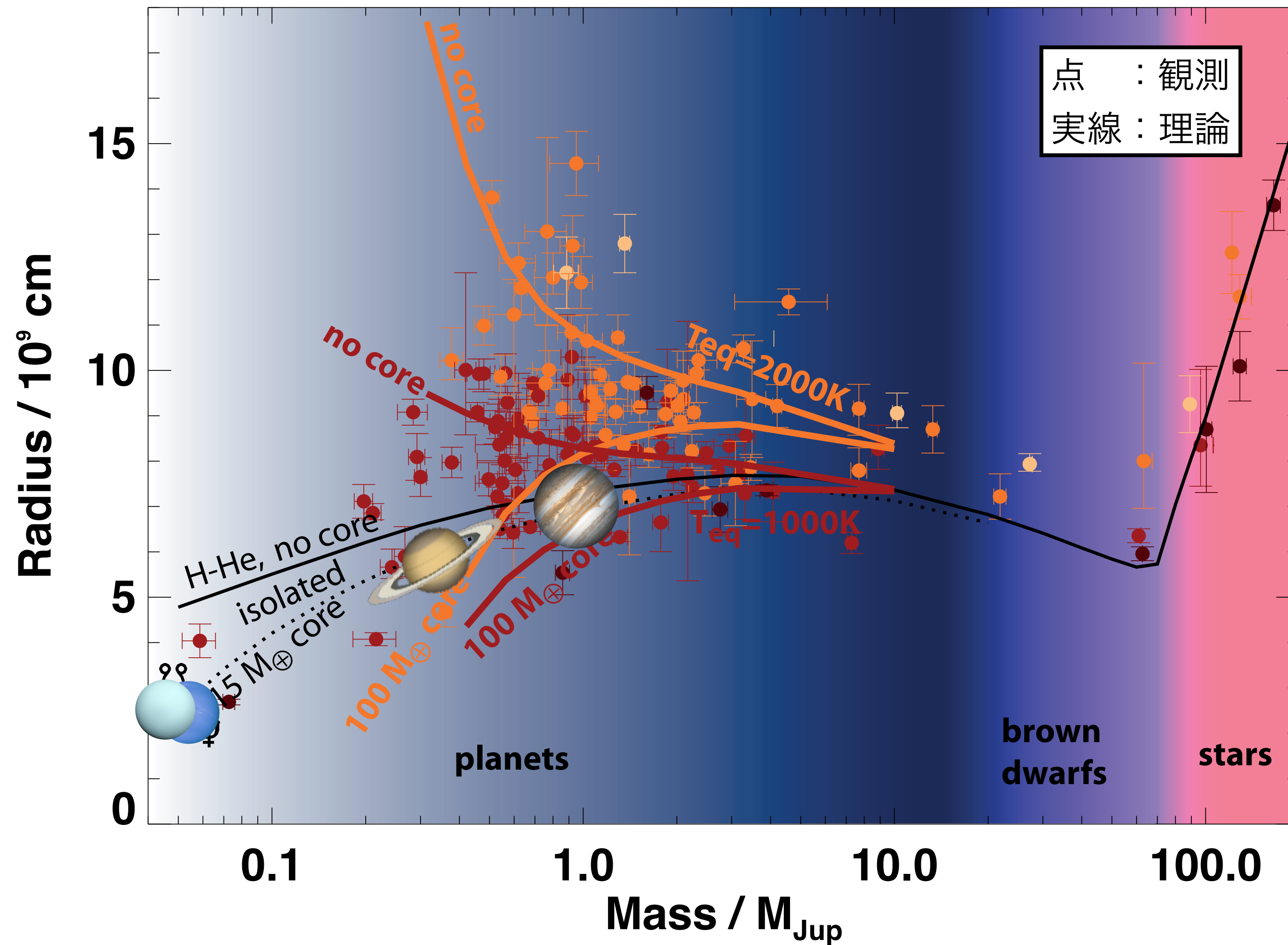
巨大氷惑星の内部構造



Guillot & Gautier (2014) in *Treatise in Geophysics*

- 木星・土星と比較して観測的制約が少ない
- 高圧氷：スーパーアイオニック相(酸素原子の格子+自由な水素イオン) → ダイナモ磁場？

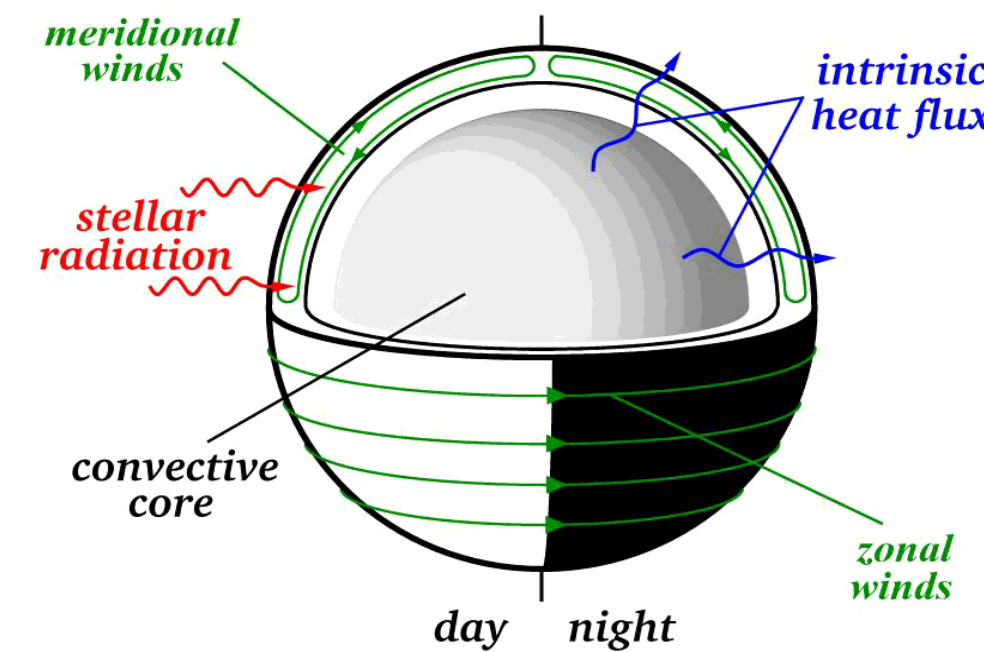
系外巨大ガス惑星の多様性



Guillot & Gautier (2014) in *Treatise in Geophysics*

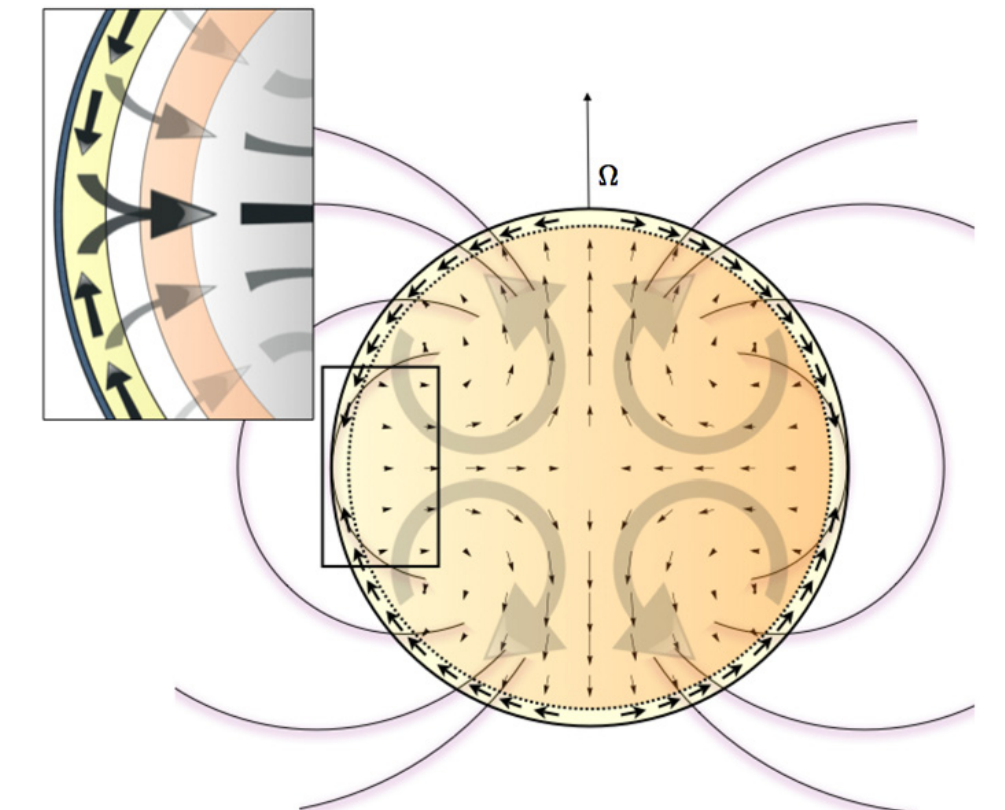
- ガス惑星のサイズにばらつき
↔ 褐色矮星・恒星は観測と
H/He100%モデルがよく一致
- 重元素(H, Heより重い元素)量
- 形成過程を反映
- 未解明の膨張メカニズム

恒星放射熱の内部への輸送



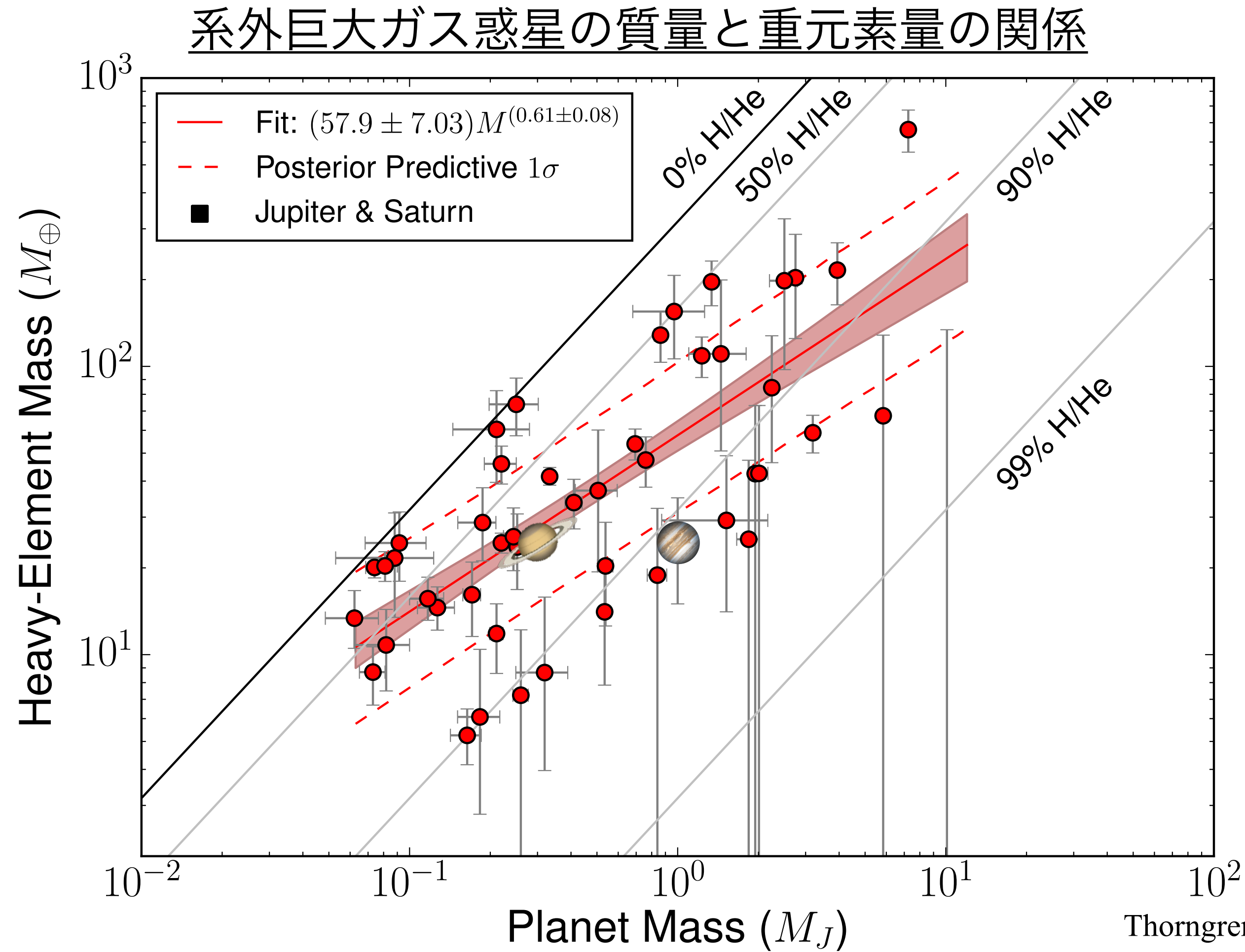
Guillot & Showman (2002)

オーム散逸



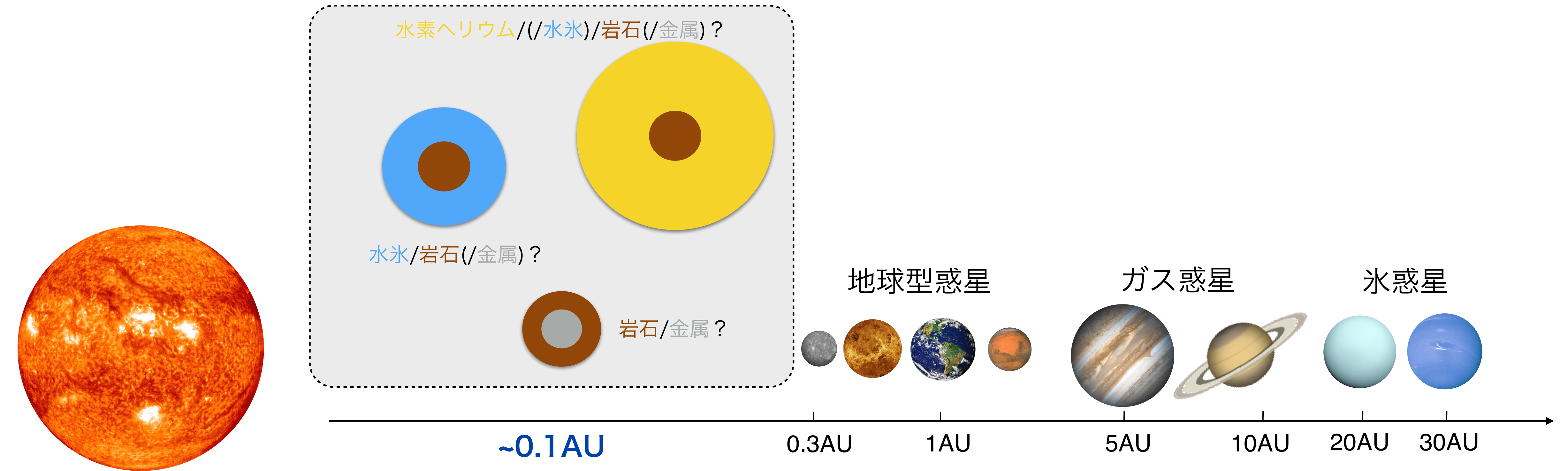
Batygin & Stevenson (2010)

巨大ガス惑星の重元素量



エンベロープにも大量の重元素が存在し，総重元素量 $\gtrsim 10 M_{\oplus} \rightarrow$ 形成過程を反映

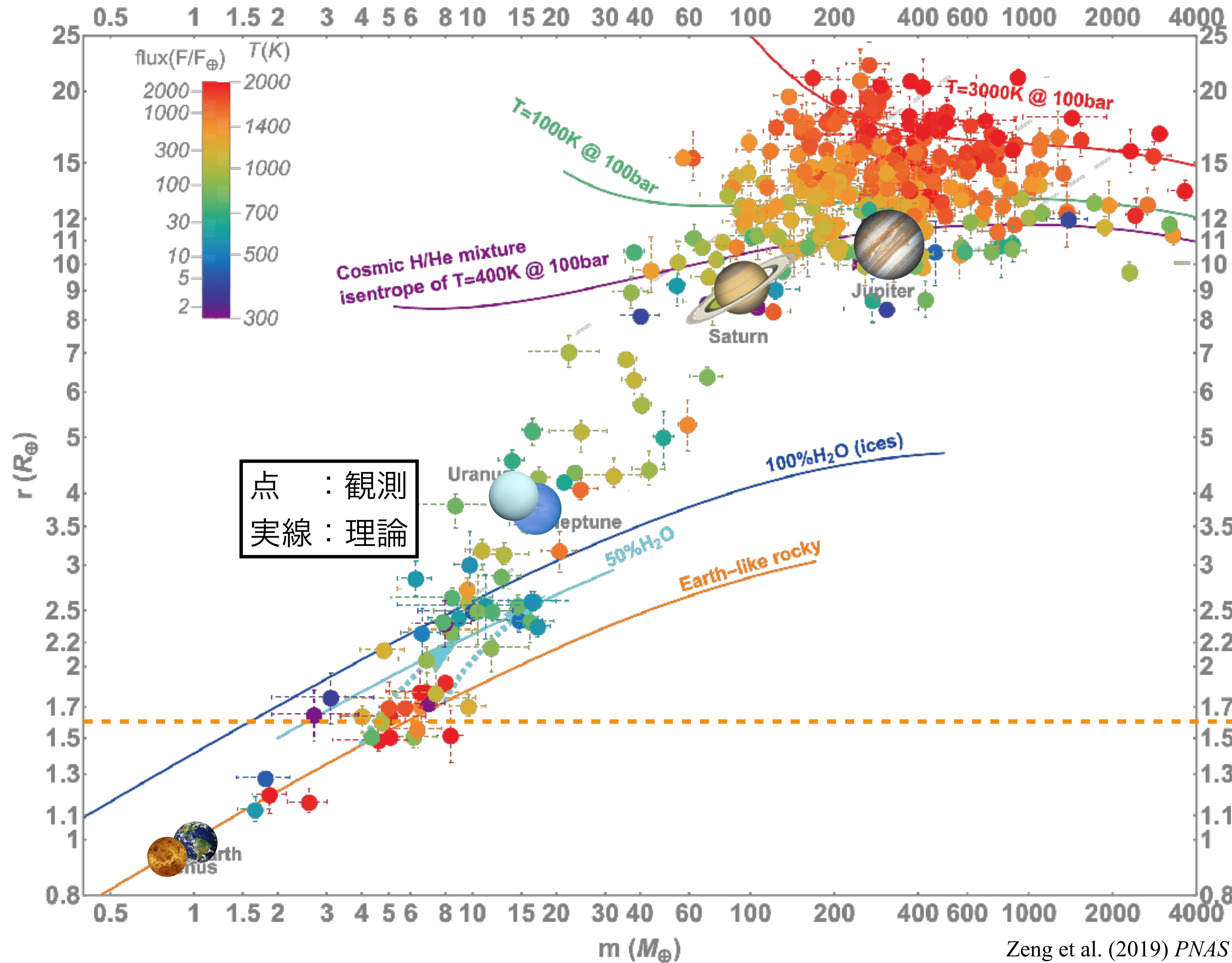
小質量系外惑星の正体は？



- 観測量：平均密度のみ知りたいパラメータ：H/He, 水, 岩石, 金属比
→ 内部構造・組成がわからない！
- スーパーアース, ミニネプチューンなどの通称は必ずしも組成を反映していない
- 統計的性質・理論からの理解, (将来的な)大気観測に期待

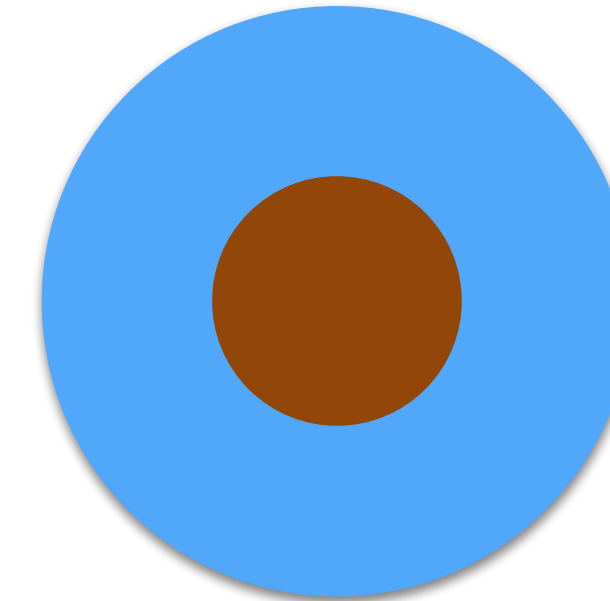
系外惑星の質量と半径の分布

(精度の良いものだけプロット)

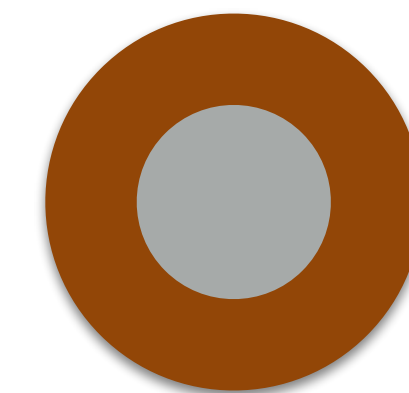
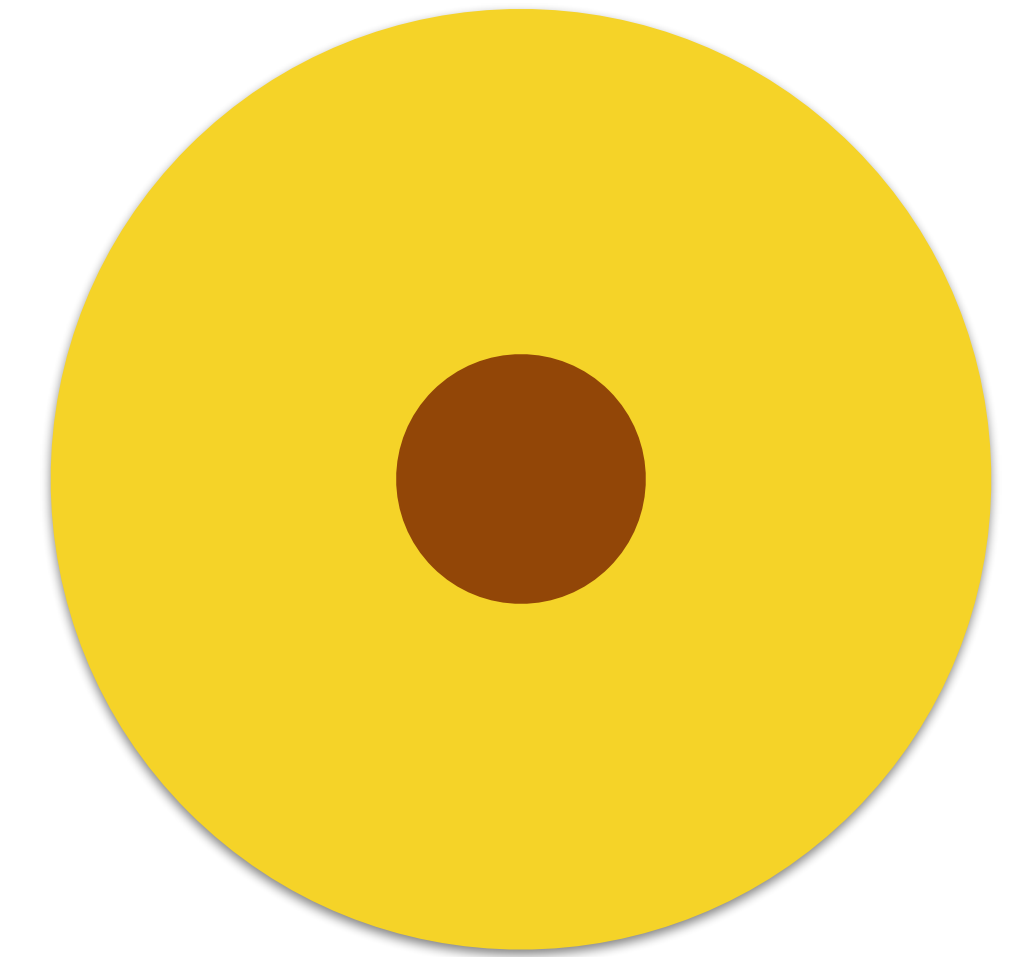


$r > 1.6 R_{\oplus}$: 氷や H/Heガスをまとう

水素ヘリウム/(水氷)/岩石(/金属)



水氷/岩石(/金属)



岩石/金属

$r < 1.6 R_{\oplus}$: 岩石惑星?

なぜ惑星サイズは $\sim 1R_J$ で頭打ちになるのか？

静水圧平衡の式 $\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$ — (1)

質量保存の式 $\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$ — (2)

状態方程式 + 温度構造の式 \rightarrow ポリトロープ関係式 $p = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$ — (3) で近似
例) 等温・理想気体なら $n = \infty$.

(1)から $\frac{p}{R} \sim \rho \frac{GM}{R^2}$ — (4). (2)から, $\frac{M}{R} \sim R^2 \rho$ — (5)

最終的に (3)-(5) を組み合わせて, $R \propto K^{\frac{n}{3-n}} M^{\frac{n-1}{n-3}}$ — (6)

なぜ惑星サイズは $\sim 1R_J$ で頭打ちになるのか？

$$R \propto K^{\frac{n}{3-n}} M^{\frac{n-1}{n-3}} \quad (6)$$

i) $M \rightarrow 0$ では、圧縮性が効かず $n \rightarrow 0$. $R \propto M^{\frac{1}{3}}$

ii) $M \rightarrow \infty$ ($\gtrsim 10M_J$)では、

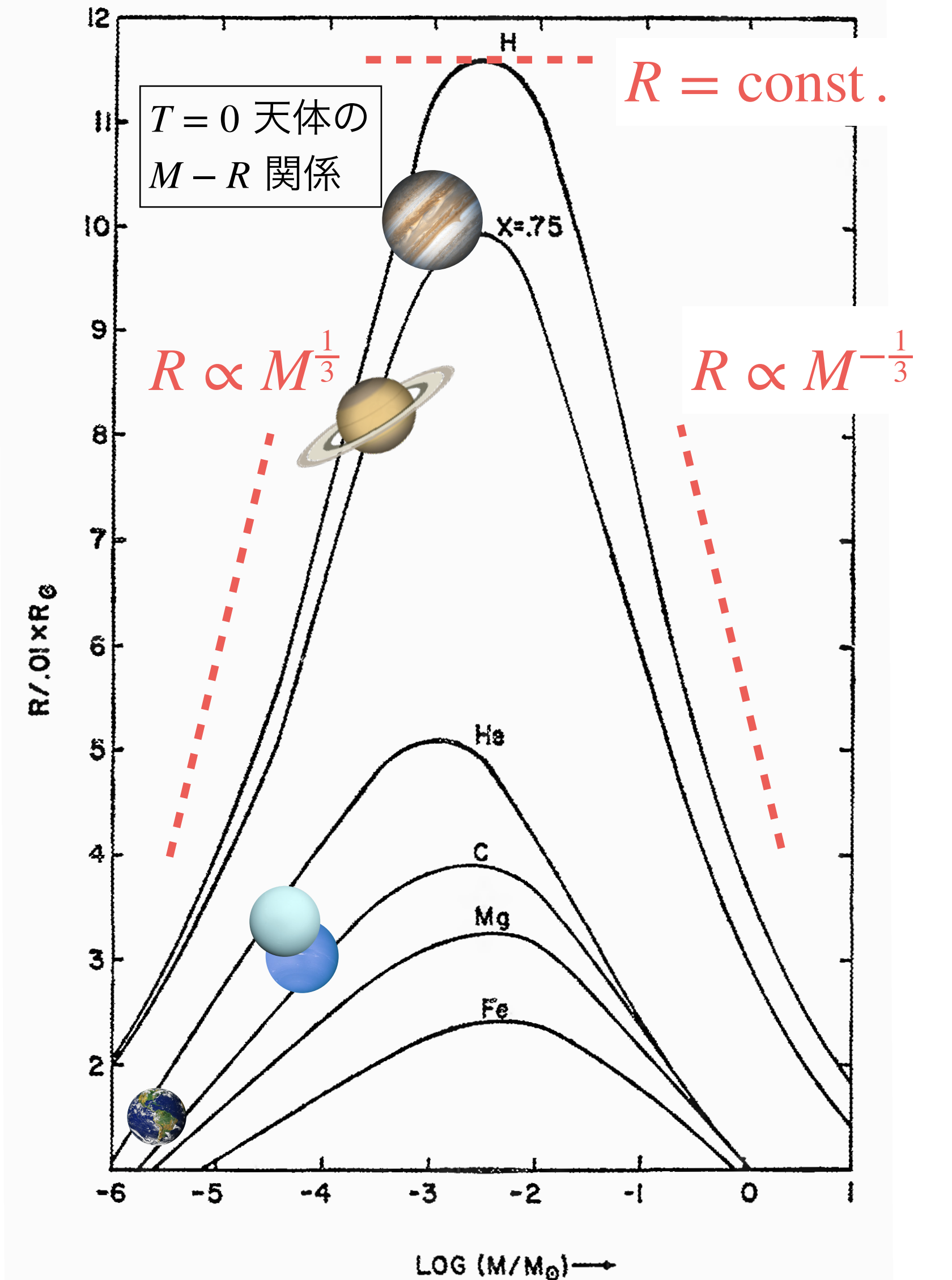
縮退フェルミ気体となり $n \rightarrow 3/2$. $R \propto M^{-\frac{1}{3}}$

iii) $M \simeq 1M_J$ において $n \simeq 1$. $R \propto M^0 = \text{const.}$ (see e.g., Guillot & Gautier 2014)

\therefore 木星質量付近で惑星半径は最大値をとる.

物理的には、クーロン力と縮退圧の寄与が釣り合っている.

(Seager et al. 2007)



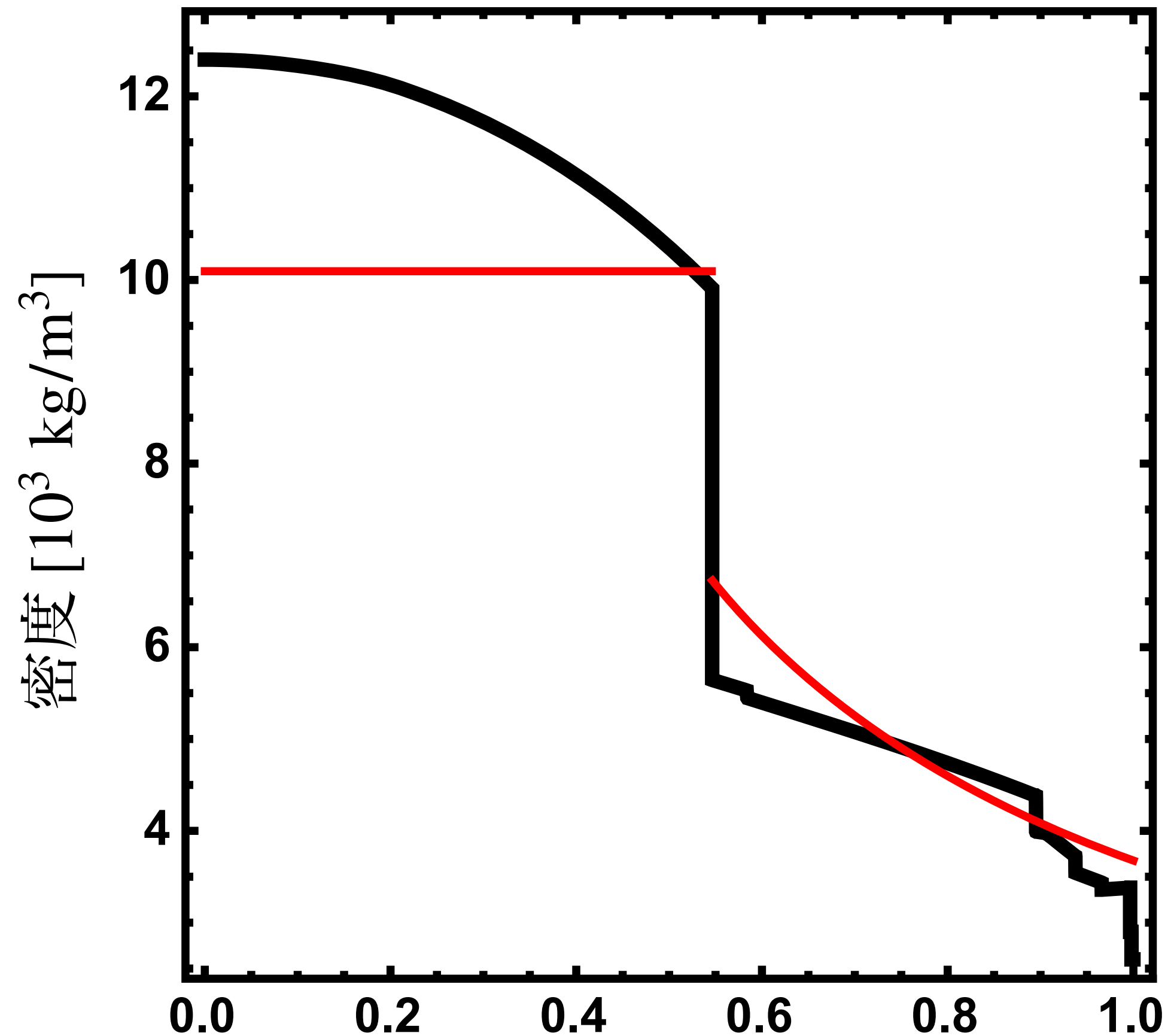
Zapolsky & Salpeter (1969) *Astrophys. J.*

まとめ

- 内部構造の物理モデル：静水圧平衡, 質量保存, 状態方程式 (+ 温度構造) の式
- テクトニクス形態：地球のみプレートテクトロニクス → 大陸地殻の形成
- 巨大ガス惑星の内部構造：1 Mbar を超える高圧 → 金属水素
- 巨大氷惑星の内部構造：導電性の氷？
- 小質量系外惑星の統計的性質： $< 1.6 R_{\oplus}$ は岩石惑星？

レポート課題 (5/13 17時締切)

黒：地球の密度分布. 赤：簡略化モデル



中心からの距離 [地球半径 $6.4 \times 10^6 \text{ m} = 1$]

Zeng & Jacobsen (2017) *Astrophys. J.*

地球マントルの密度分布を(1)のように近似する.

$$\rho(r) \simeq \rho_0 \cdot \frac{R}{r} \quad \text{--- (1),}$$

$$\rho_0 = 3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, R = 6.4 \times 10^6 \text{ m (地球半径)}$$

また, コアの半径 $R_c \simeq R/2$ とする. このとき,

$$\text{静水圧平衡の式 } \frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2} \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{質量保存の式 } \frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \text{--- (3)}$$

と (1) を解くことで,

コアマントル境界の圧力 p_{CMB} を表す表式を求めよ.

また, その式に各物理量の数値を代入し,

p_{CMB} を見積もれ. (有効数字1桁)