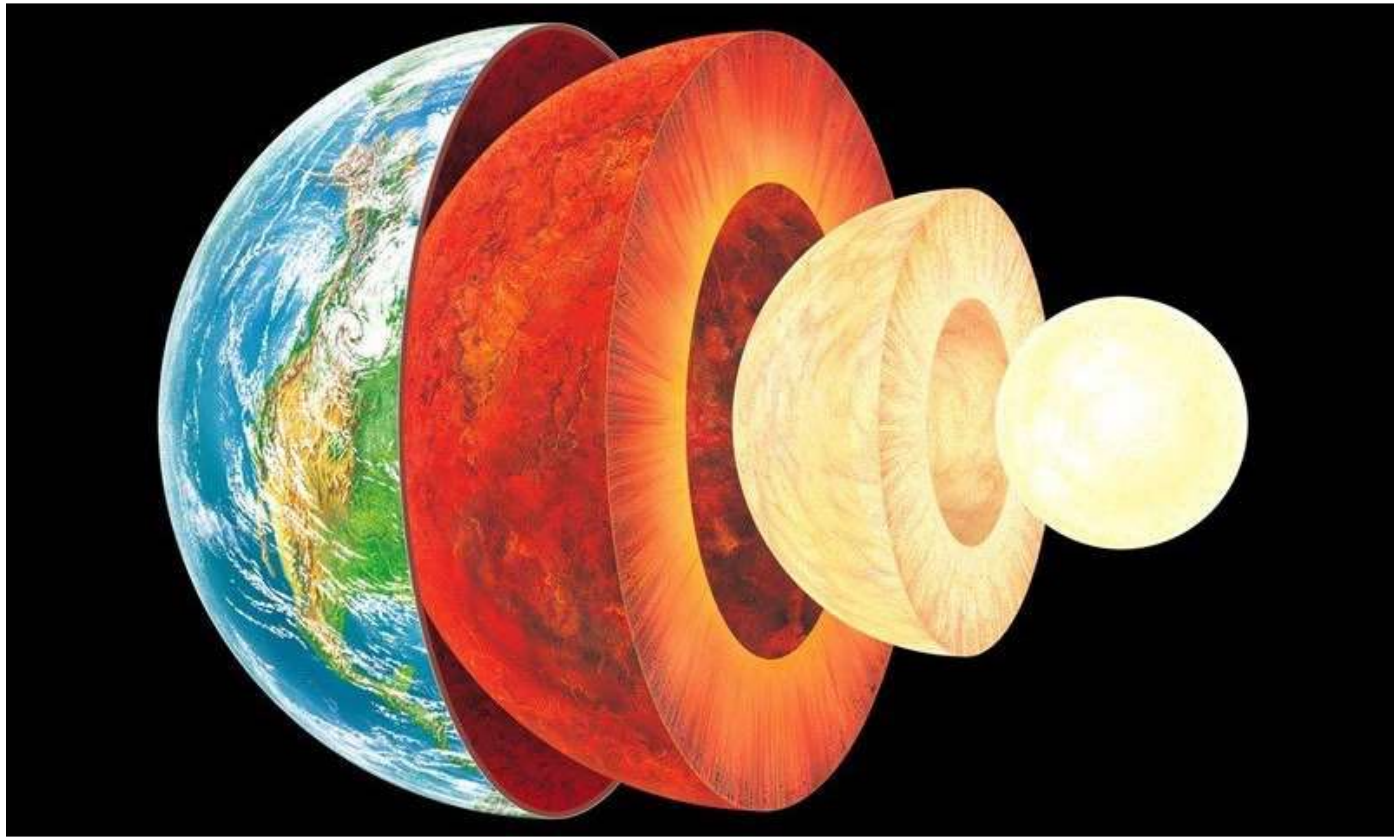
地球惑星圏物理学
第5回：惑星内部の熱輸送と熱史



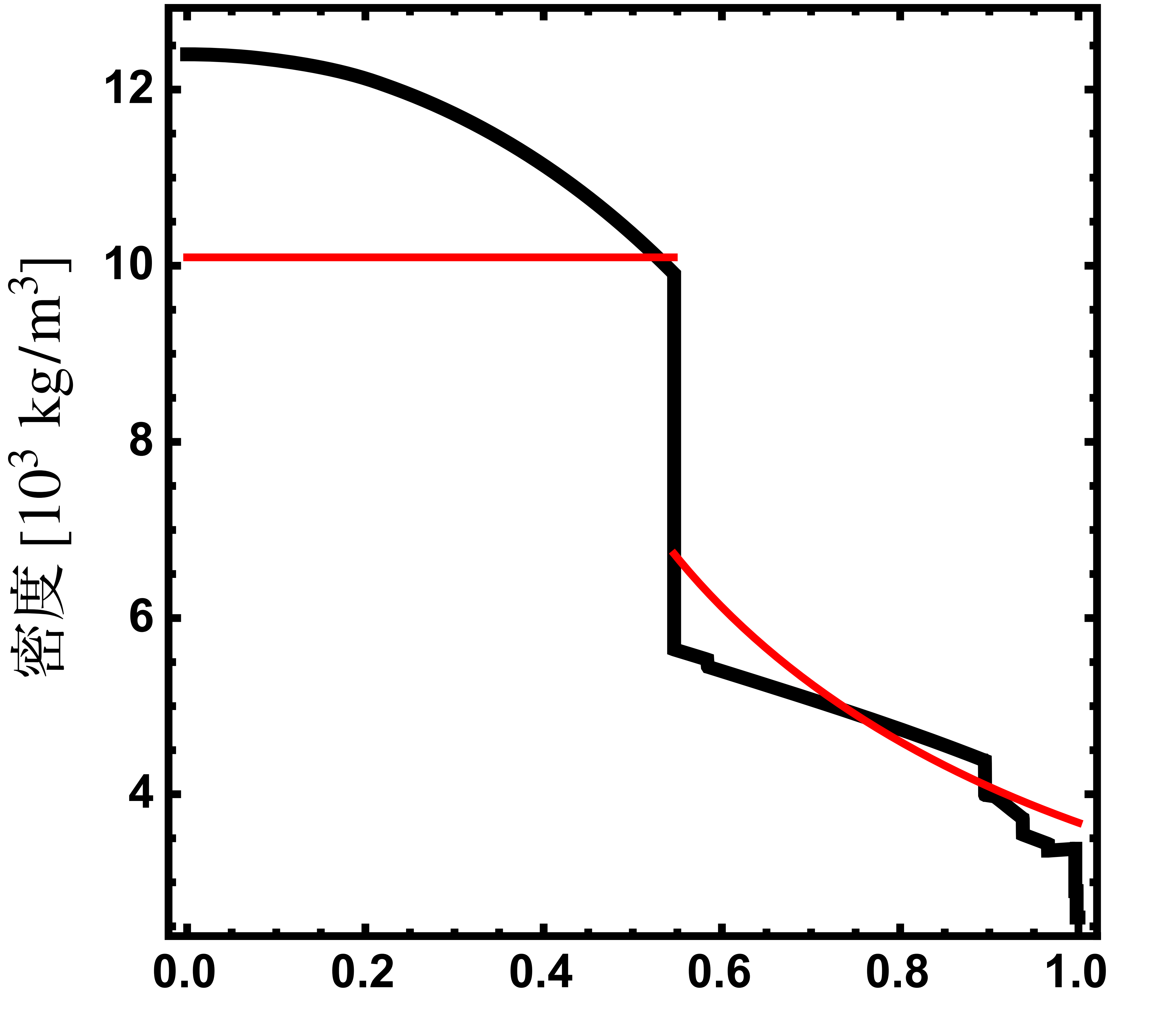
黒川 宏之

東京工業大学 地球生命研究所

hiro.kurokawa@elsi.jp

レポート課題 (5/13 17時締切)

黒：地球の密度分布．赤：簡略化モデル



Zeng & Jacobsen (2017) *Astrophys. J.*

地球マントルの密度分布を(1)のように近似する．

$\rho(r) \simeq \rho_0 \cdot \frac{R}{r}$ — (1),

コアの質量は地球質量 6.0×10^{24} kg の 30 % とする

$\rho_0 = 3 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, $R = 6.4 \times 10^6$ m (地球半径)

また，コアの半径 $R_\mathrm{c} \simeq R/2$ とする．このとき，

静水圧平衡の式 $\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{GM_r}{r^2}$ — (2)

質量保存の式 $\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$ — (3)

と (1) を解くことで，

コアマントル境界の圧力 p_CMB を表す表式を求めよ．

また，その式に各物理量の数値を代入し，

p_CMB を見積もれ．(有効数字1桁)

レポート課題 (5/13 17時締切)

(1)を(3)に代入.

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho_0 Rr \quad (r : R_\mathrm{c} \sim R)$$

R_c から r まで積分すると, $M_r(r) - M_r(R_\mathrm{c}) = \int_{R_\mathrm{c}}^{r} 4\pi\rho_0 Rrdr$

$\therefore M_r(r) = 2\pi\rho_0 Rr^2 + M_r(R_\mathrm{c})$ — (4)

(4)と(1)を(2)に代入.

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G}{r^2}(2\pi\rho_0 Rr^2 + M_r(R_\mathrm{c})) \cdot \rho_0 \frac{R}{r} \quad (r : R_\mathrm{c} \sim R)$$

R から R_c まで積分すると, $p(R_\mathrm{c}) - p(R) = -\int_{R_\mathrm{c}}^{R} \frac{G}{r^2}(2\pi\rho_0 Rr^2 + M_r(R_\mathrm{c})) \cdot \rho_0 \frac{R}{r} dr$

$p(R) \simeq 10^5\ \mathrm{Pa} \ll p(R_\mathrm{c}) \equiv p_\mathrm{CMB}$ より

$p_\mathrm{CMB} = 2G\rho_0 R\left(\pi\rho_0 R \ln 2 + \frac{3M_r(R_\mathrm{c})}{R^2}\right)$ — (5) 数値を代入すると, $p_\mathrm{CMB} \simeq 2 \times 10^{11}\ \mathrm{Pa}$

球対称構造モデルの基礎方程式

静水圧平衡の式 $\dfrac{dp}{dr} = -\rho\dfrac{GM_r}{r^2}$ — (1)

質量保存の式 $\dfrac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\rho$ — (2)

状態方程式 $p = f(\rho, T)$ — (3)

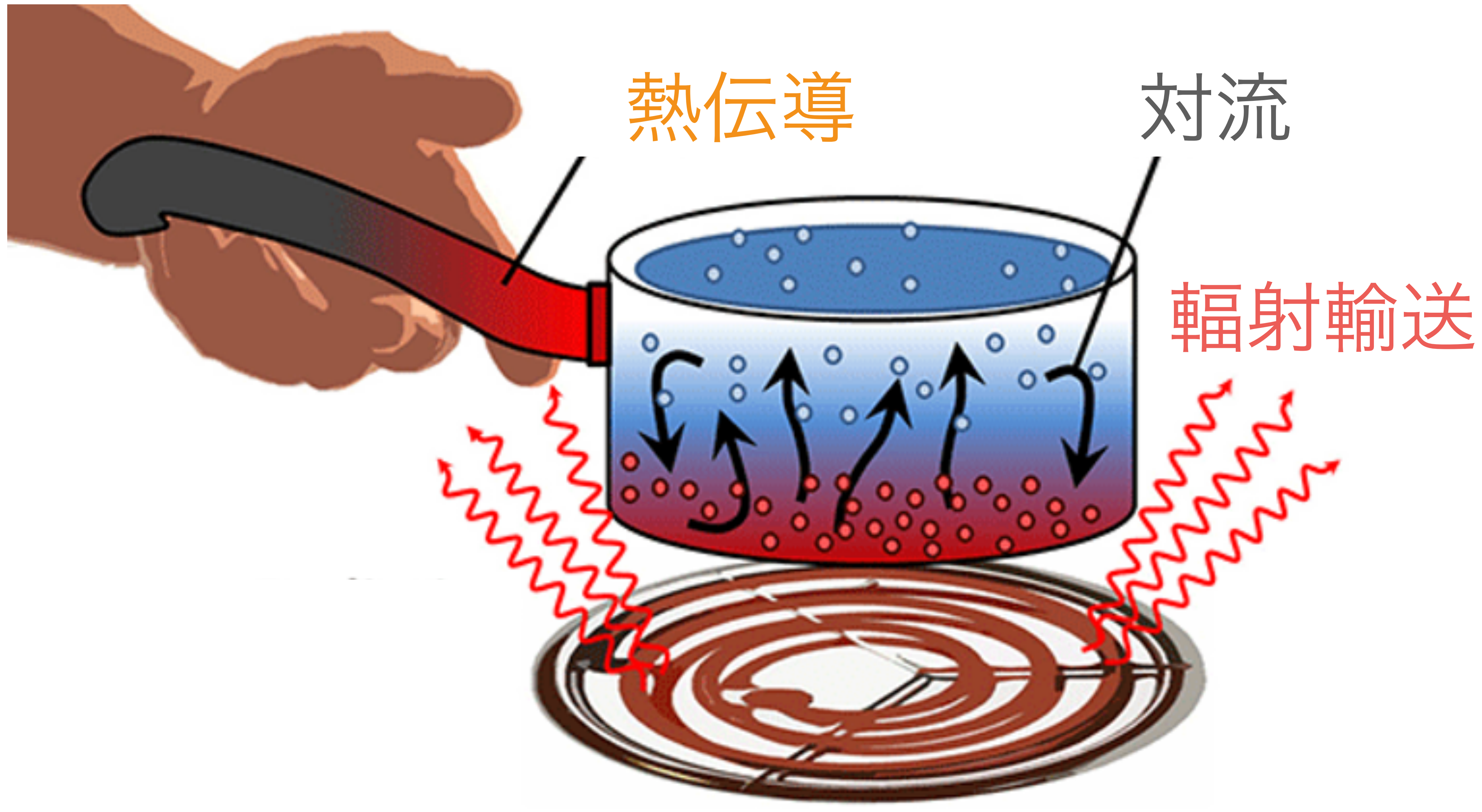
エネルギー輸送の式 $\dfrac{dT}{dr} = -\min\left(\left|\left(\dfrac{dT}{dr}\right)\right|_{\mathrm{cond}}, \left|\left(\dfrac{dT}{dr}\right)\right|_{\mathrm{rad}}, \left|\left(\dfrac{dT}{dr}\right)\right|_{\mathrm{conv}} \right)$ — (4)

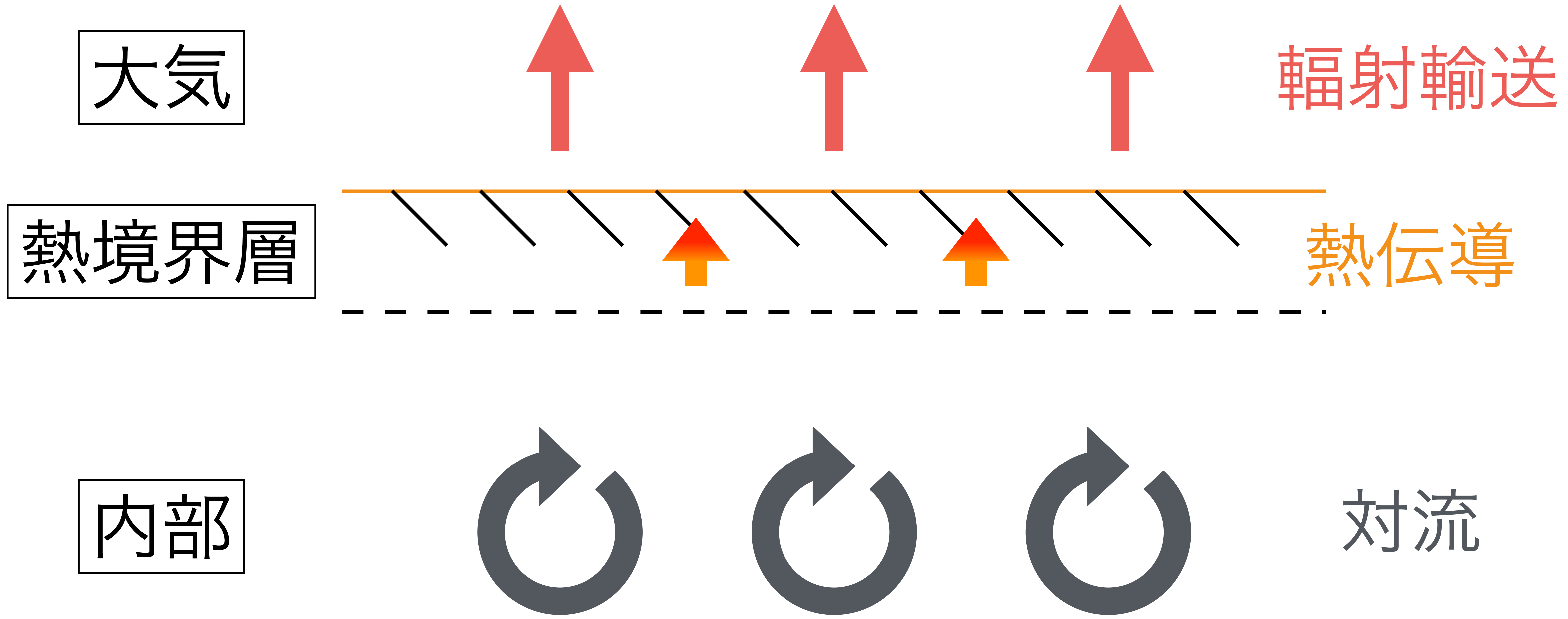
一般には $M_r(r)$, $p(r)$, $\rho(r)$, $T(r)$ について (1)-(4)を解くが,

固体天体については状態方程式が $p \simeq f(\rho)$ と近似でき，(1)-(3) で方程式が閉じる.

∵ マントル鉱物の体積膨張率 $\alpha = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p \sim 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1} \rightarrow\ \sim 10^3\ \mathrm{K}$ の温度変化での体積変化 $\sim 1\,\%$

惑星内部の熱輸送

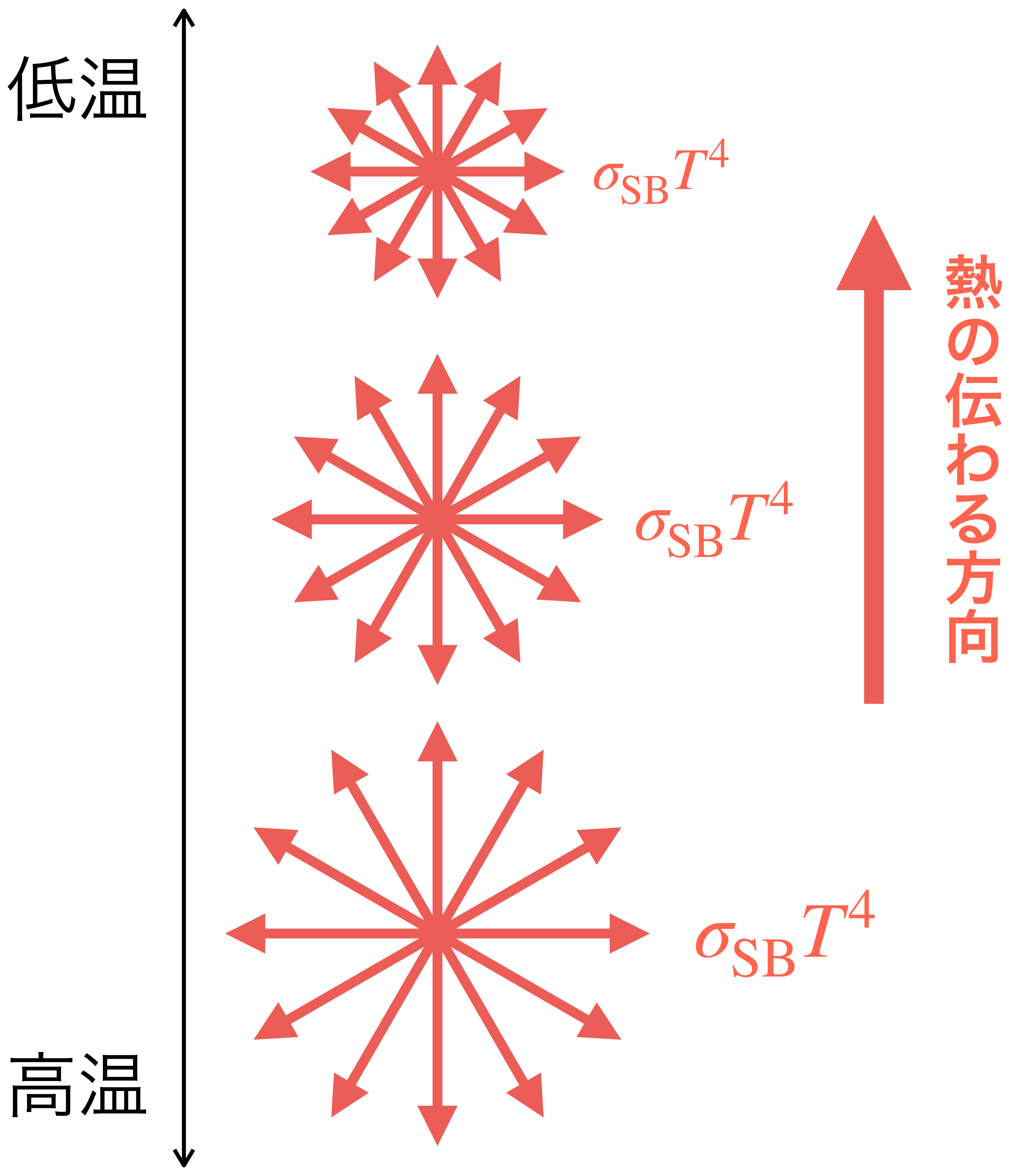




- 惑星内部の熱は対流と熱伝導で輸送される
- 物質境界は熱伝導が優勢な熱境界層となる

輻射輸送

- 任意の物質はその温度に応じて電磁波を放射して冷却
- 電磁波を吸収した物質は加熱される



<u>シュテファン=ボルツマンの法則</u>

黒体からの電磁波の放射は以下の式で表せる

$F = \sigma_{SB} T^4$ — (1)

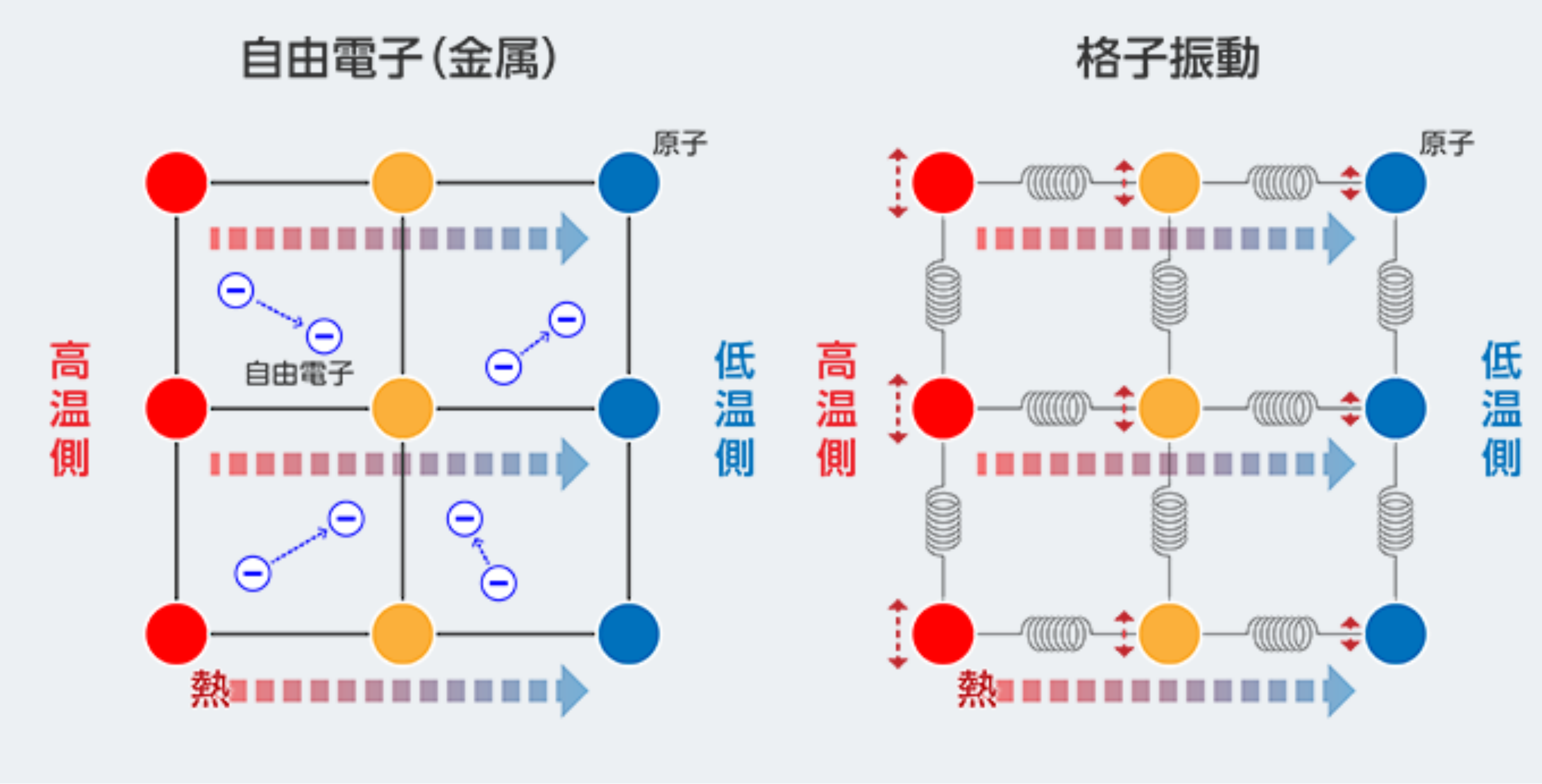
F : 単位面積から単位時間に放射される全エネルギー

T : 温度,　σ_{SB} : シュテファン=ボルツマン定数

$$\sigma_{SB} \equiv \frac{2\pi^5 k_B^4}{15ch^3} \simeq 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}} \quad \text{— (2)}$$

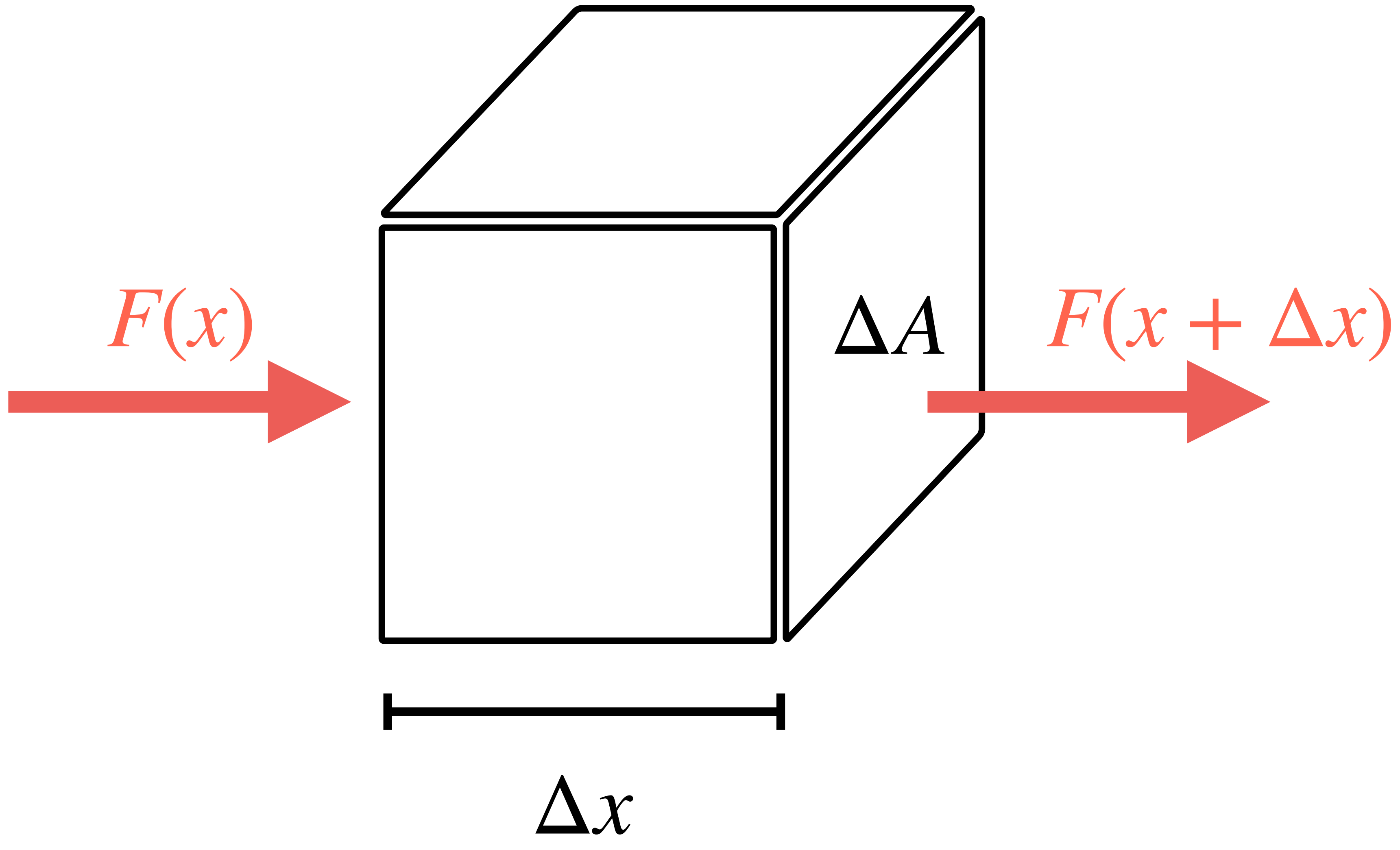
熱伝導

- 輻射輸送・マクロな物質移動(対流)を伴わない熱の伝わり方
- 格子振動の伝達，伝導電子(金属)や分子(流体)の移動



https://techtimes.dexerials.jp/electronics/heat-conduction/

熱伝導方程式



熱伝導フラックス：$F = -k_{\mathrm{cond}}\dfrac{\partial T}{\partial x}$ — (1)

熱伝導方程式：$\rho c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}$ — (2)

ここで，k_{cond}：熱伝導率，c_p：比熱 (質量あたり)

特に，k_{cond} が空間的に一様である場合，$\dfrac{\partial T}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ — (3) と書ける

ここで $\kappa \equiv \dfrac{k_{\mathrm{cond}}}{\rho c_p}$ は熱拡散率と呼ばれる

熱伝導の時間スケール

マントル(岩石)の熱拡散係数 $\kappa \sim 10^{-6}\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-1}$ — (1)

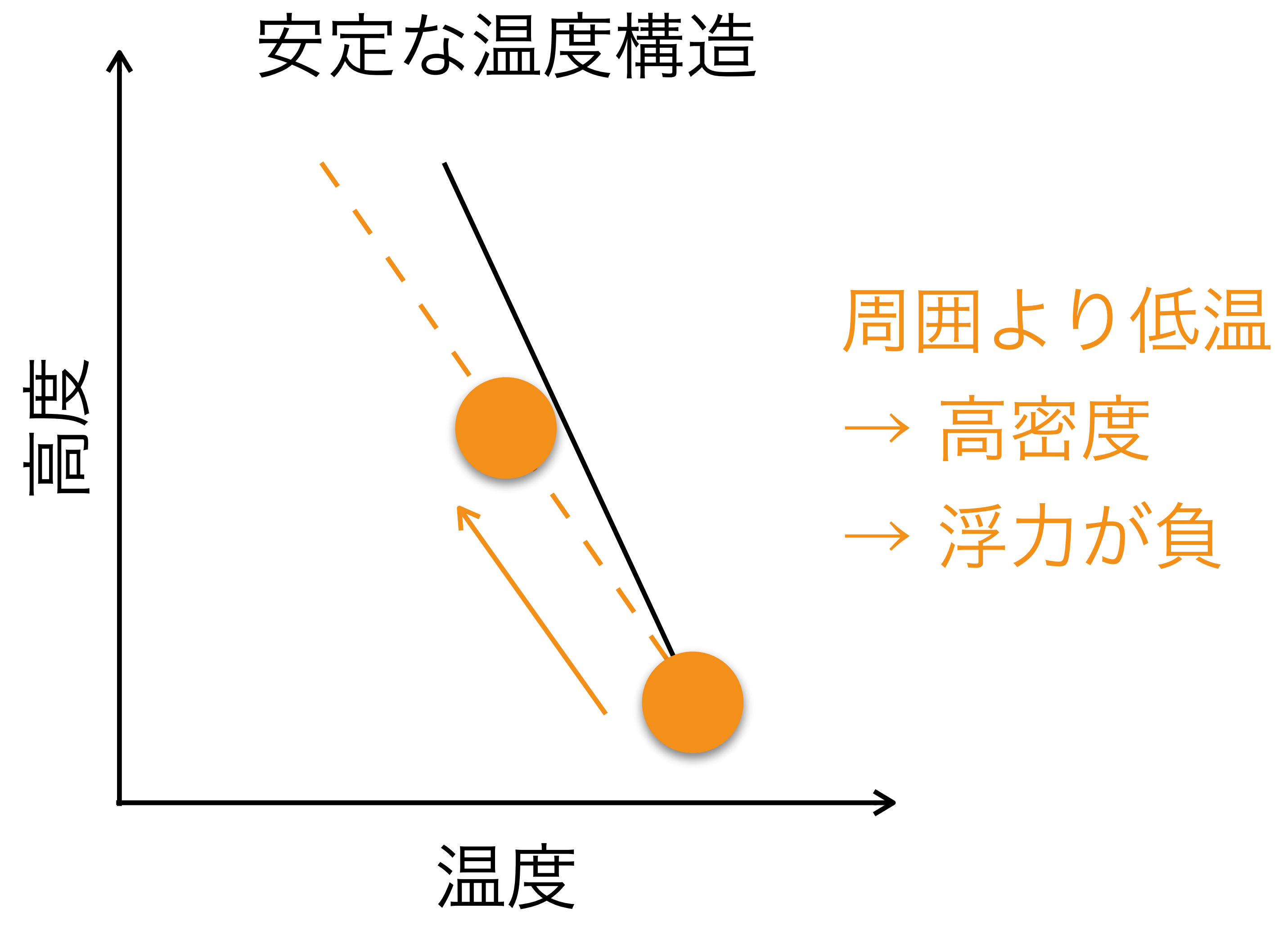
距離 l と拡散時間 τ の関係は, $\tau \sim \dfrac{l^2}{\kappa}$ — (2)

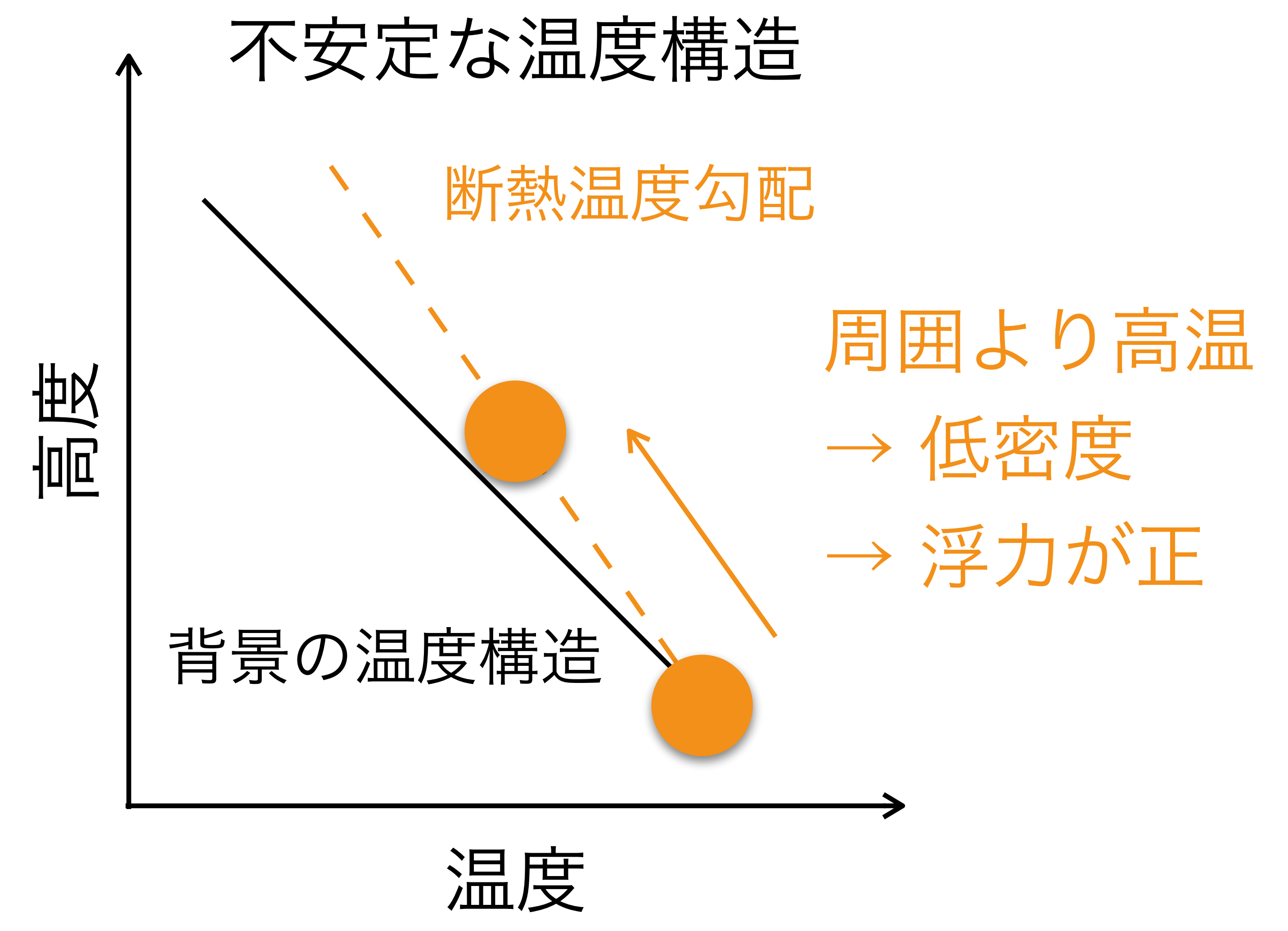
i) マントルの厚み $l \sim 3 \times 10^6\ \mathrm{m} \to \tau \sim 10^{11}\ \mathrm{year}$ (1000億年！)

ii) 地球年齢 $\tau \sim 5 \times 10^9\ \mathrm{year} \to$ 熱伝導する距離 $l \sim 10^5\ \mathrm{m} = 100\ \mathrm{km}$

∴ 惑星サイズの物体は熱伝導ではほぼ冷却できない

熱対流





- 下が高温，上が低温 → 密度差(→浮力)によって不安定
- 浮力による不安定化，熱伝導・粘性力による安定化のバランスで対流の有無が決まる
- 対流の有無を判定する無次元量：レイリー数

$$Ra = \frac{\alpha\rho g(\Delta T - \Delta T_{\rm ad})d^3}{\kappa\eta} = \text{浮力/(熱伝導・粘性)} \quad \text{— (1)}$$

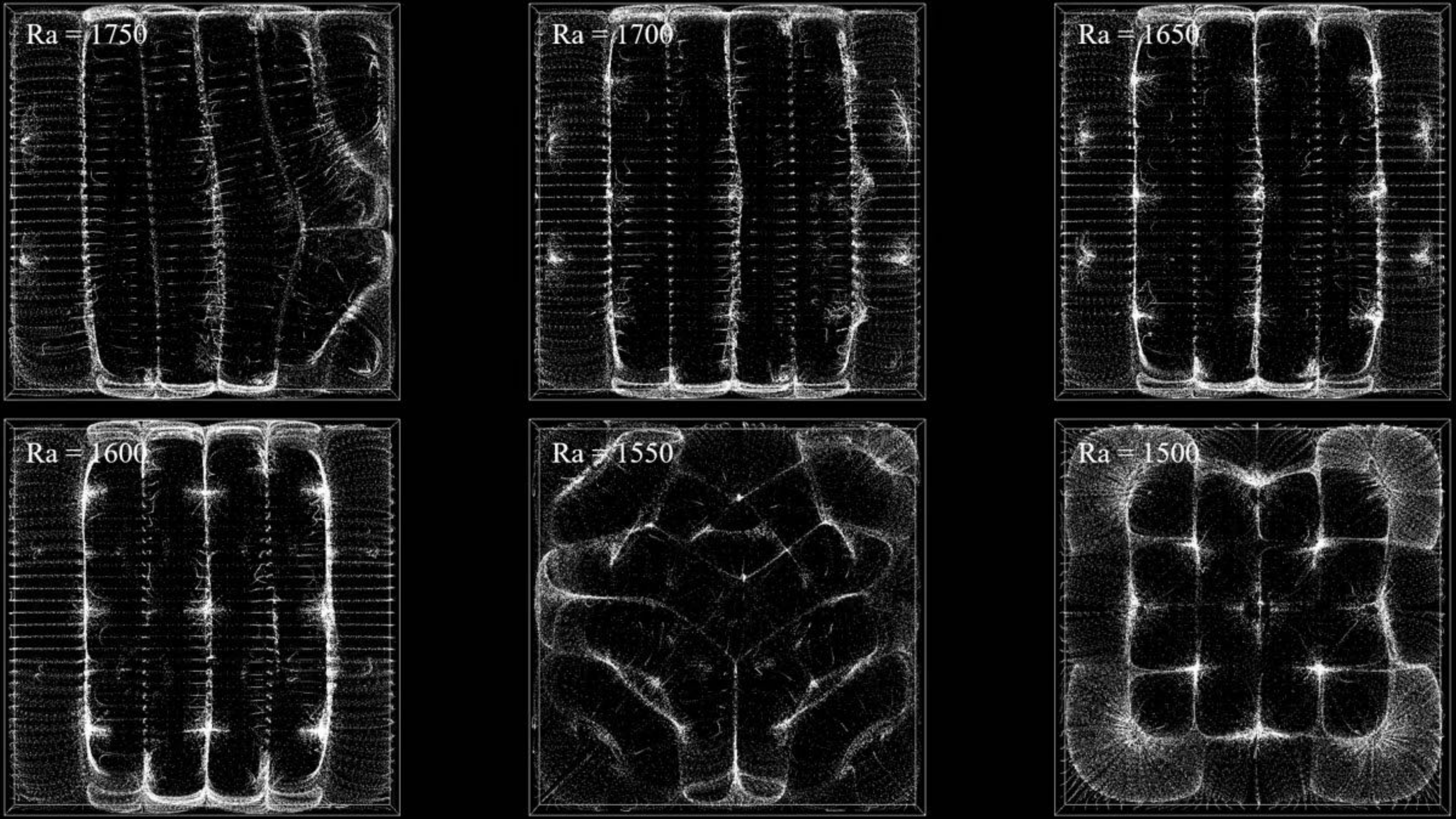
α: 体積膨張率，ρ: 密度，g: 重力加速度，ΔT: 上端と下端の温度差

d: 上端と下端の距離，κ: 熱拡散係数，η: 粘性係数

- 対流不安定となる条件：$Ra \gtrsim 10^3$ (レイリー条件)

Bénard convection at Pr = 1

Credit: 計算流体力学研究所 https://www.youtube.com/watch?v=XalDYrX8csU



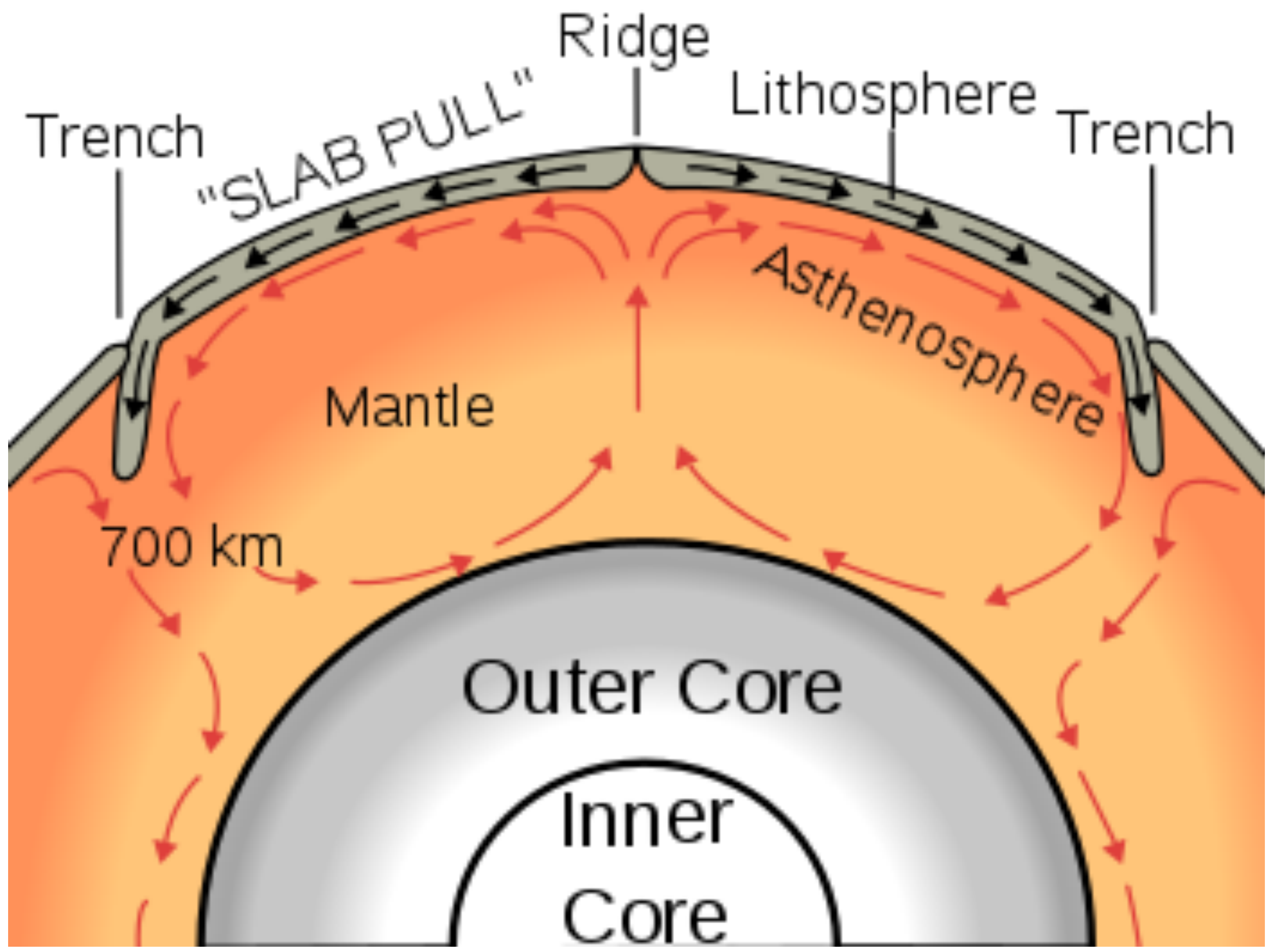
地球マントルは対流不安定

- 長い時間スケール (> 10^3年) では固体であるマントルも流体的に振る舞う
- $\alpha \sim 3 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$: 体積膨張率，$\rho \sim 5 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$: 密度，$g \sim 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$: 重力加速度

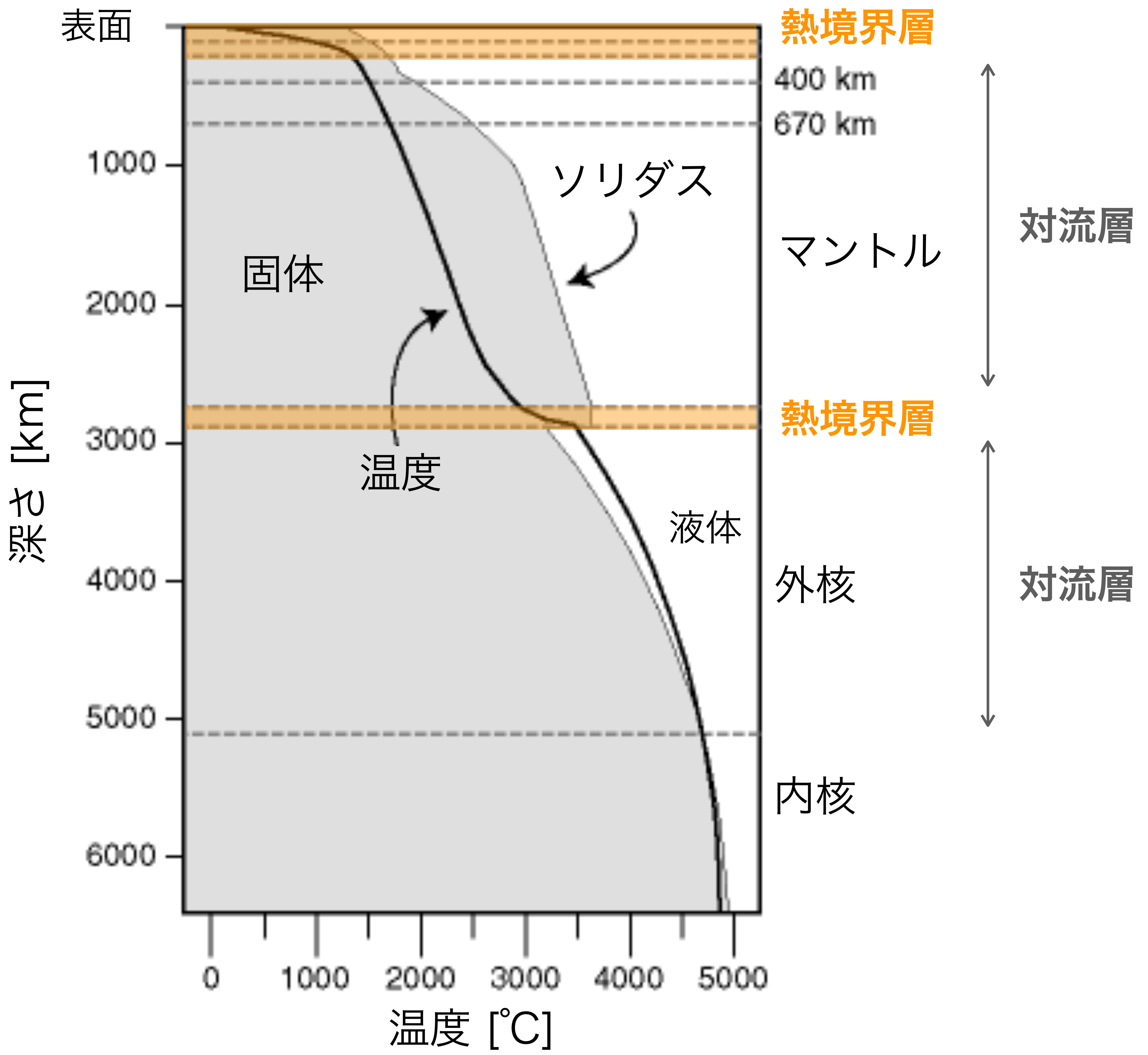
  $\Delta T \sim 3 \times 10^3\ \mathrm{K}$: 上端と下端の温度差，$d \sim 3 \times 10^6\ \mathrm{m}$: 上端と下端の距離,

  $\kappa \sim 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$: 熱拡散係数，$\eta \sim 1 \times 10^{22}\ \mathrm{Pa \cdot s}$: 粘性係数 (※深さ依存性大)

$$\rightarrow Ra = \frac{\alpha \rho g \Delta T d^3}{\kappa \eta} \sim 10^{7-8}$$



地球内部の温度構造



- 熱境界層の温度構造：
  熱伝導でエネルギー輸送する温度勾配

$$\frac{dT}{dr} \simeq \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\mathrm{cond}} \equiv -\frac{F_{\mathrm{int}}}{k_{\mathrm{cond}}} \quad \text{— (1)}$$

- 対流層の温度構造：
  対流運動によって**断熱温度勾配**

$$\frac{dT}{dr} \simeq \left(\frac{dT}{dr}\right)_{\mathrm{ad}} = -\frac{\alpha g T}{c_p} \quad \text{— (2) (次ページ)}$$

http://eqseis.geosc.psu.edu/~cammon/HTML/Classes/IntroQuakes/Notes/earth_origin_lecture.html

断熱温度勾配の導出

エントロピー変化 $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp = \frac{c_p}{T}dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T dp$ — (1)

一方，ギブズの自由エネルギー変化 $dG = d(U + pV - TS) = Vdp - SdT$ — (2) より，

$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p, \ V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$ — (3).

$\therefore \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T\right)_p = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — (4). (マクスウェルの関係式)

(4)を(1)に代入して，$dS = \frac{c_p}{T}dT - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$ — (5)

最後に，体積膨張率 $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — (6) を(5)に代入して，$dS = \frac{c_p}{T}dT - \alpha V dp.$ — (7)

$\therefore \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{\alpha T}{\rho c_p}$ — (8) → $\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\mathrm{ad}} = \frac{dp}{dz}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = -\frac{\alpha g T}{c_p}$ — (9)

熱境界層・対流層の温度勾配

熱境界層：地殻+マントル上部 数100 km

$F_{\mathrm{int}} = 0.09\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$, $\kappa \simeq 1 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$,

$\rho \simeq 3 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $c_p \simeq 1 \times 10^3\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$より,

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\mathrm{cond}} = -\frac{F_{\mathrm{int}}}{k_{\mathrm{cond}}} \simeq -30\ \mathrm{K \cdot km^{-1}}$$

対流層：熱境界層を除くマントル

$\alpha = 3 \times 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$, $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $c_p = 1000\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $T \simeq 2000\ \mathrm{K}$ より,

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\mathrm{ad}} = \frac{dp}{dz}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = -\frac{\alpha g T}{c_p} \simeq 0.6\ \mathrm{K \cdot km^{-1}}$$

惑星の熱源：形成時の重力ポテンシャルエネルギー

例として，月を形成した巨大衝突を想定

質量 $M_1 = 0.9\ M_\oplus$ の天体1に，質量 $M_2 = 0.1\ M_\oplus$ の天体2が巨大衝突した場合，

巨大衝突による温度変化 ΔT は，

熱エネルギー = 重力ポテンシャルエネルギーより，　$(M_1 + M_2)C_p\Delta T = \dfrac{GM_1M_2}{R_{1+2}}$.　　— (1)

ここで 集積後の天体半径 $R_{1+2} = R_\oplus$，比熱 $C_p = 1000\ \mathrm{J\ K^{-1}\ kg^{-1}}$ とする.

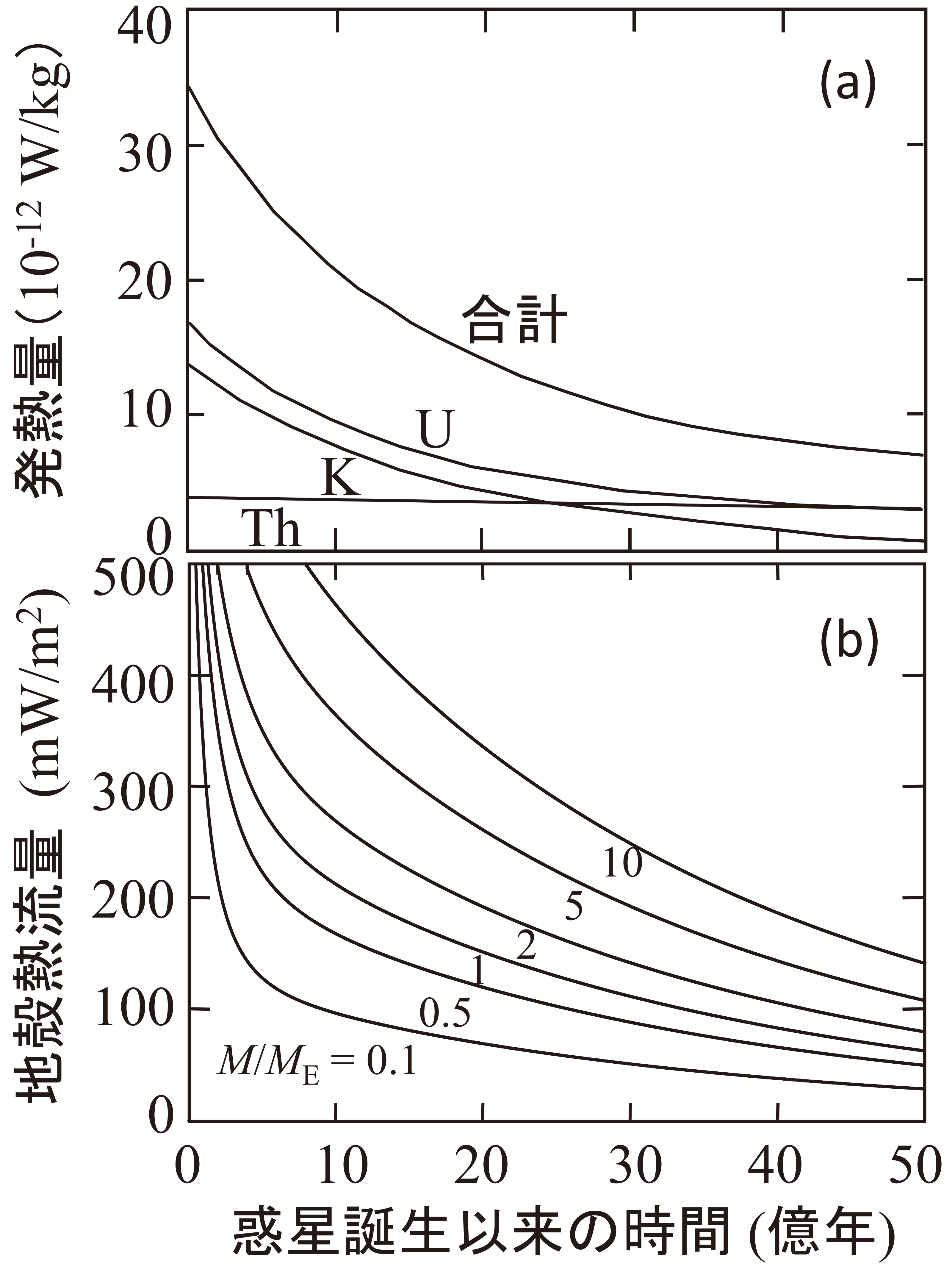
(1)より，$\Delta T = \dfrac{GM_1M_2}{R_{1+2}(M_1 + M_2)C_p} \simeq 5000\ \mathrm{K}$ — (2).

→ 岩石の典型的なソリダス温度 $T_{\mathrm{sol}} \simeq 1500\ \mathrm{K}$ を上回るため，地球は溶融状態で誕生

逆に，小惑星同士 $(M \ll 10^{-3} M_\oplus)$ の天体衝突では集積時の温度上昇は小さい

惑星の熱源：放射壊変熱

(a) 発熱量 (b) 地殻熱流量(モデル計算) の時間進化



地球の熱史に重要な放射性元素

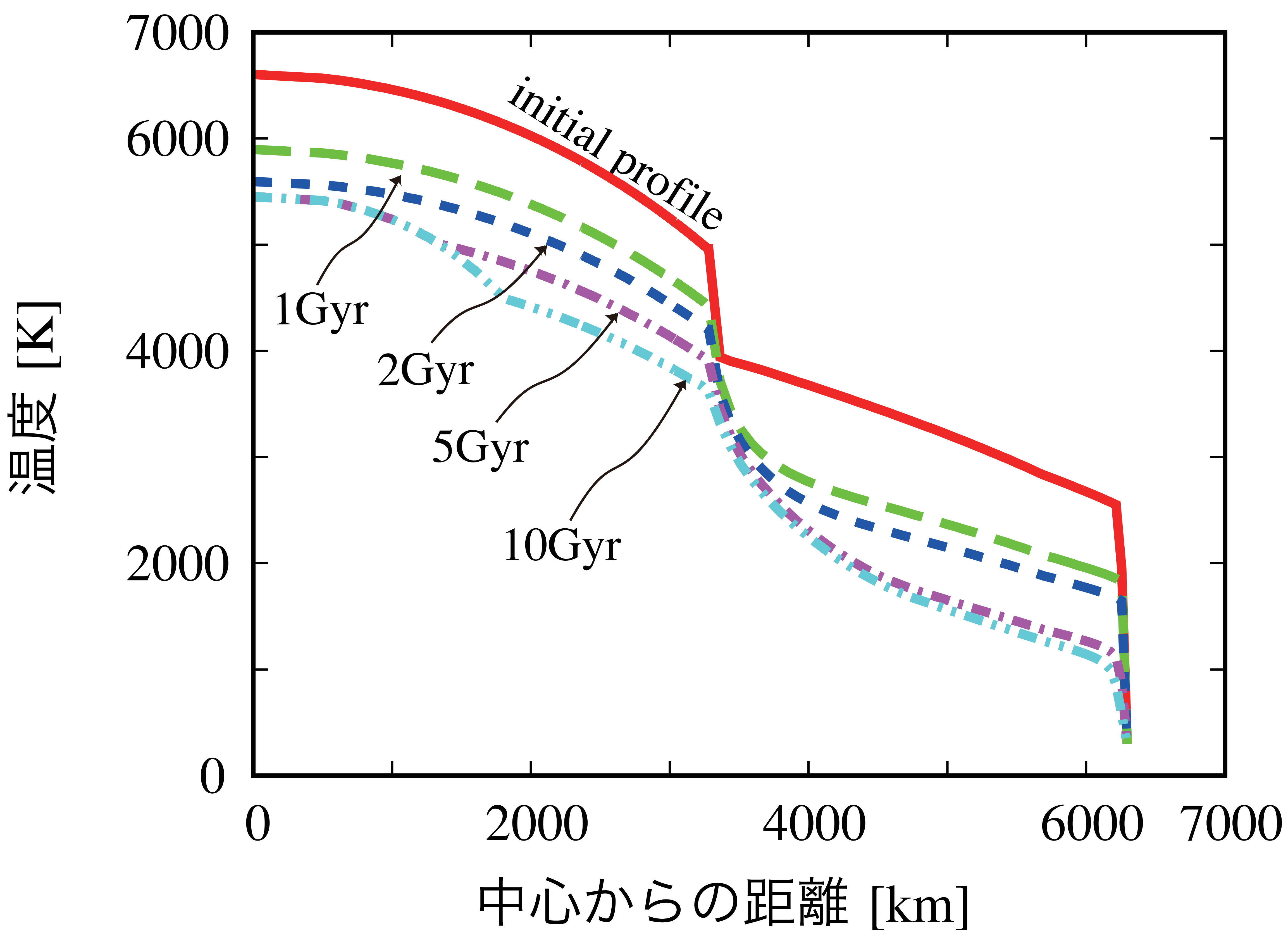
同位体	崩壊熱 (10^{-5} W/kg)	半減期 (億年)	濃度 (10^{-9} kg/kg)
^{238}U	9.46	44.7	30.8
^{235}U	56.9	7.04	0.22
^{232}Th	2.64	140	124
^{40}K	2.92	12.5	36.9

- 数十億年の熱史において放射壊変熱の寄与大
- 現在の地球の地殻熱流量の半分程度が放射壊変熱由来

田近 (2014) Isotope News

地球の熱史

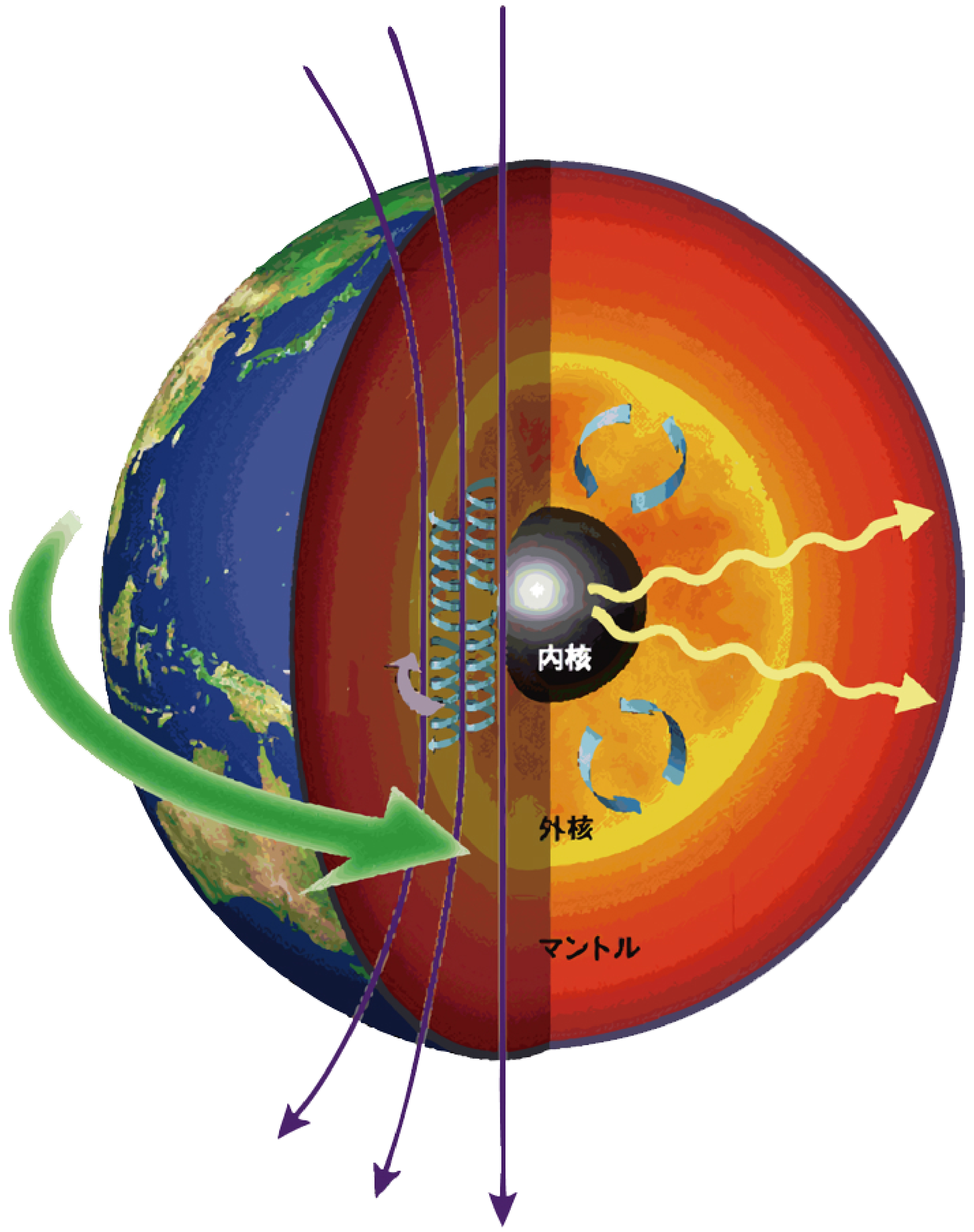
熱伝導・対流を考慮した地球内部の熱進化計算

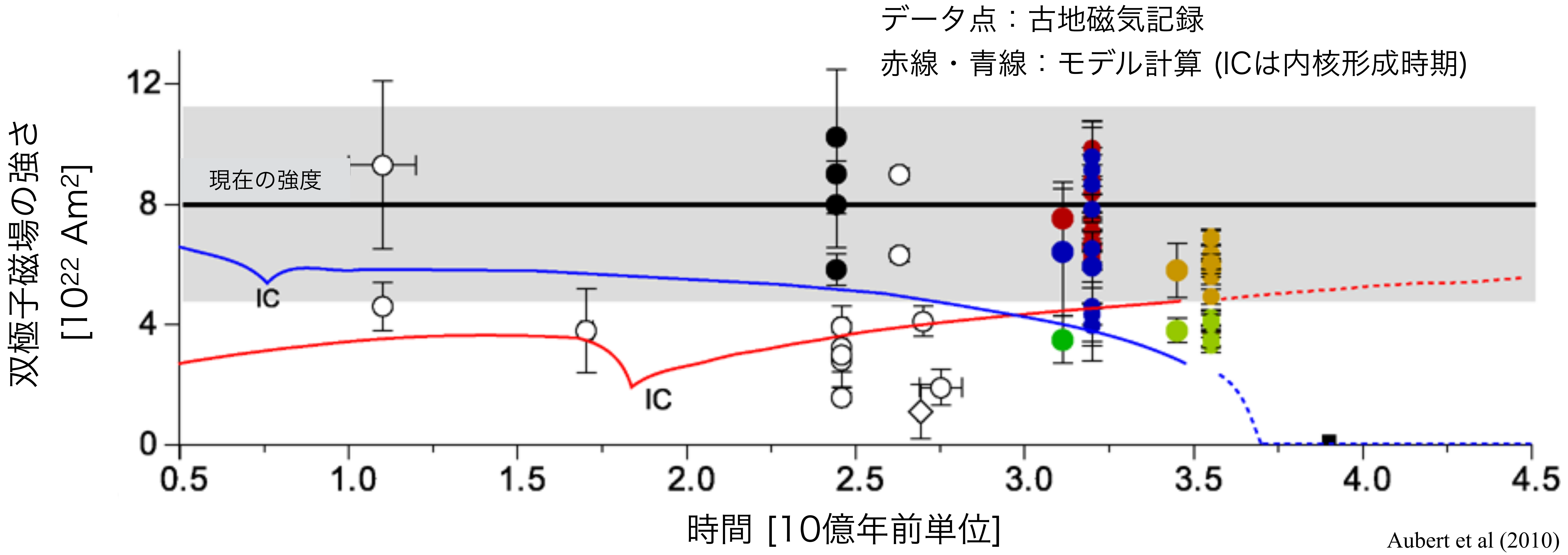


Tachinami et al. (2011) *Astrophys J.*

- 惑星内部が対流熱輸送によって冷却
  - 熱境界層は厚く，温度勾配が緩やかに
  - 対流層は断熱温度勾配を保つ
- 表面温度は別のメカニズム(大気の温室効果)で決まる

惑星の冷却と磁場



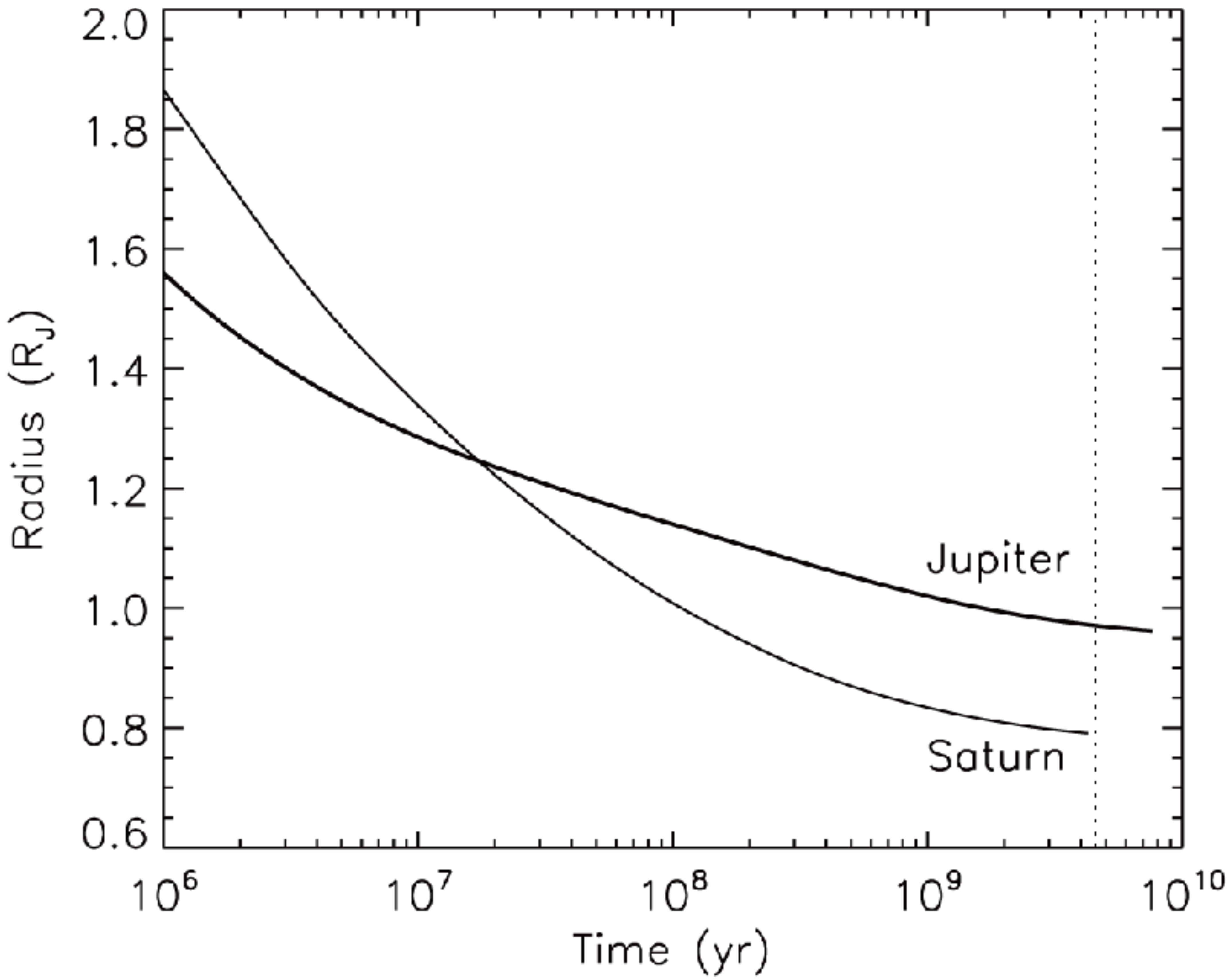


<u>地球磁場の起源：外核(液体鉄)の対流運動</u>

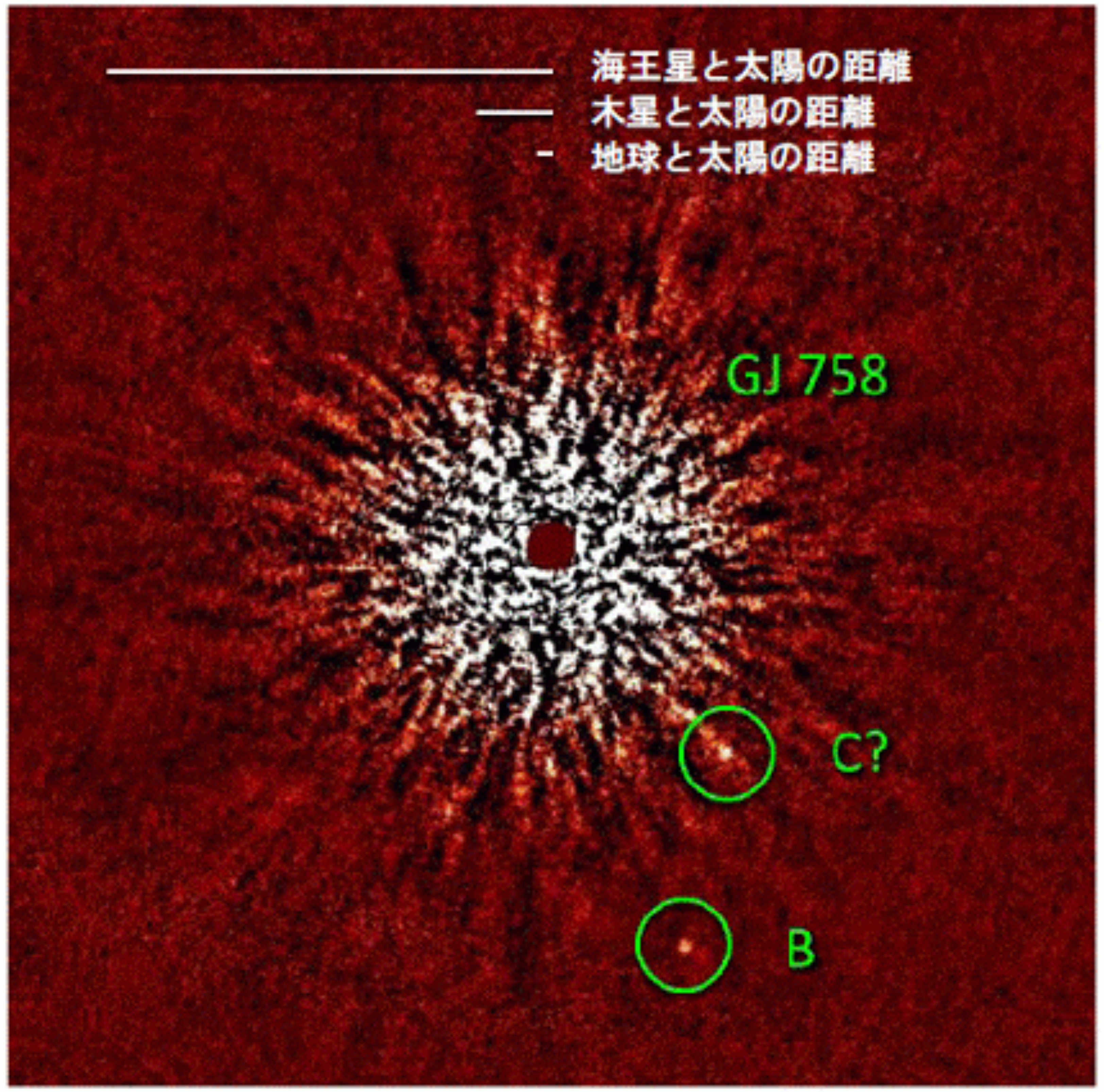
- 地球の冷却に伴い、外核が対流運動 → 磁場を生成 (ダイナモ磁場)
- 核が十分冷えると固体の内核が形成し始める → 磁場を強める (組成対流)
- 地磁気は約40億年間維持されていることが岩石(+鉱物)記録に残っている

巨大ガス惑星の熱史

木星・土星の惑星半径の進化 (Fortney et al. 2011 *Astrophys. J.*)



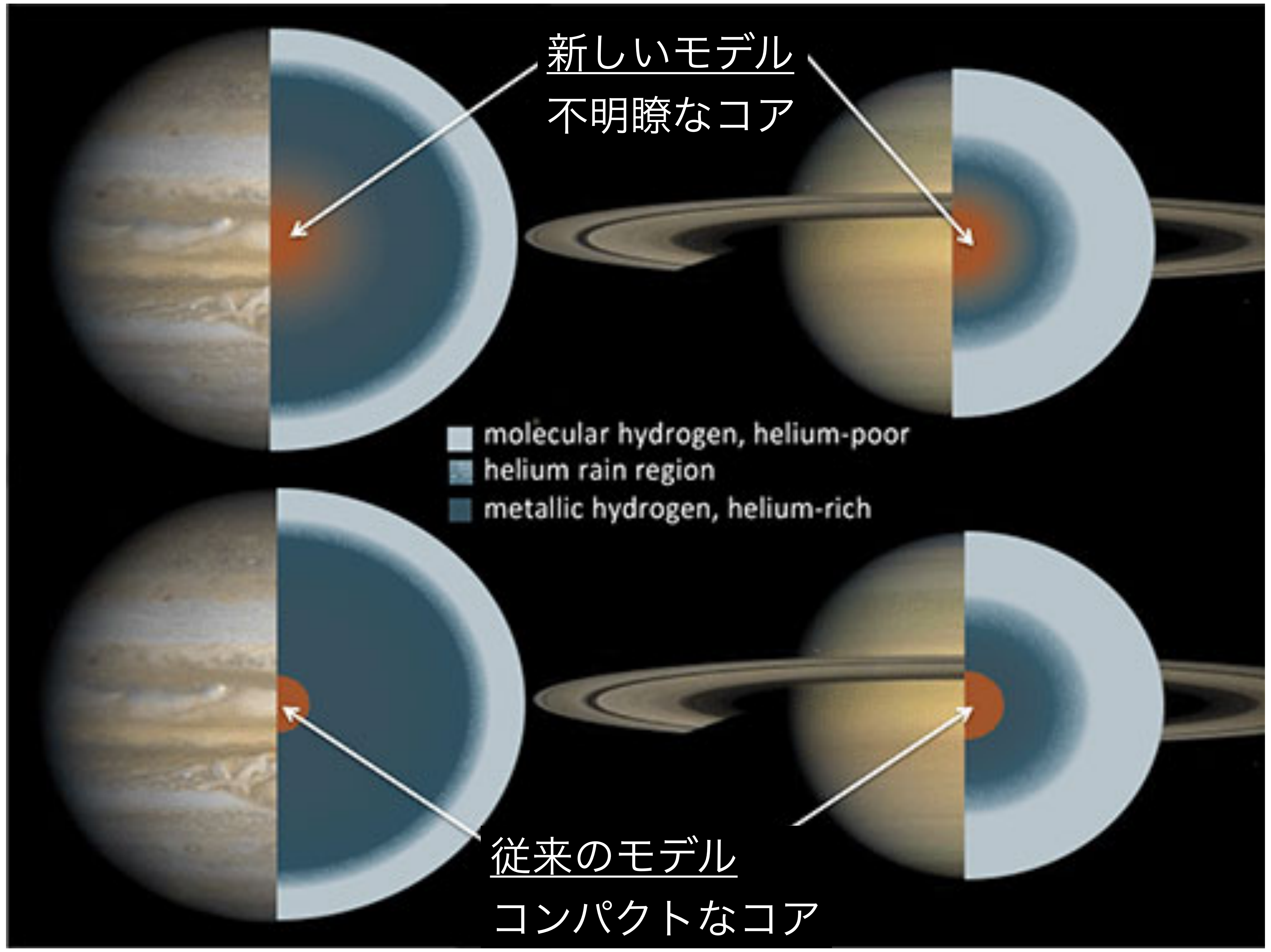
すばる望遠鏡で直接撮像された系外惑星候補 GJ758b (Image credit: 国立天文台)



- 若くまだ”熱い”巨大ガス惑星は，(軌道半径が大きければ)直接撮像できるほど明るい
- 理論的には，誕生直後は現在の1.5-2倍程度の惑星半径となる (∵ 状態方程式が温度依存) ↔ 岩石惑星

新しい内部構造モデル

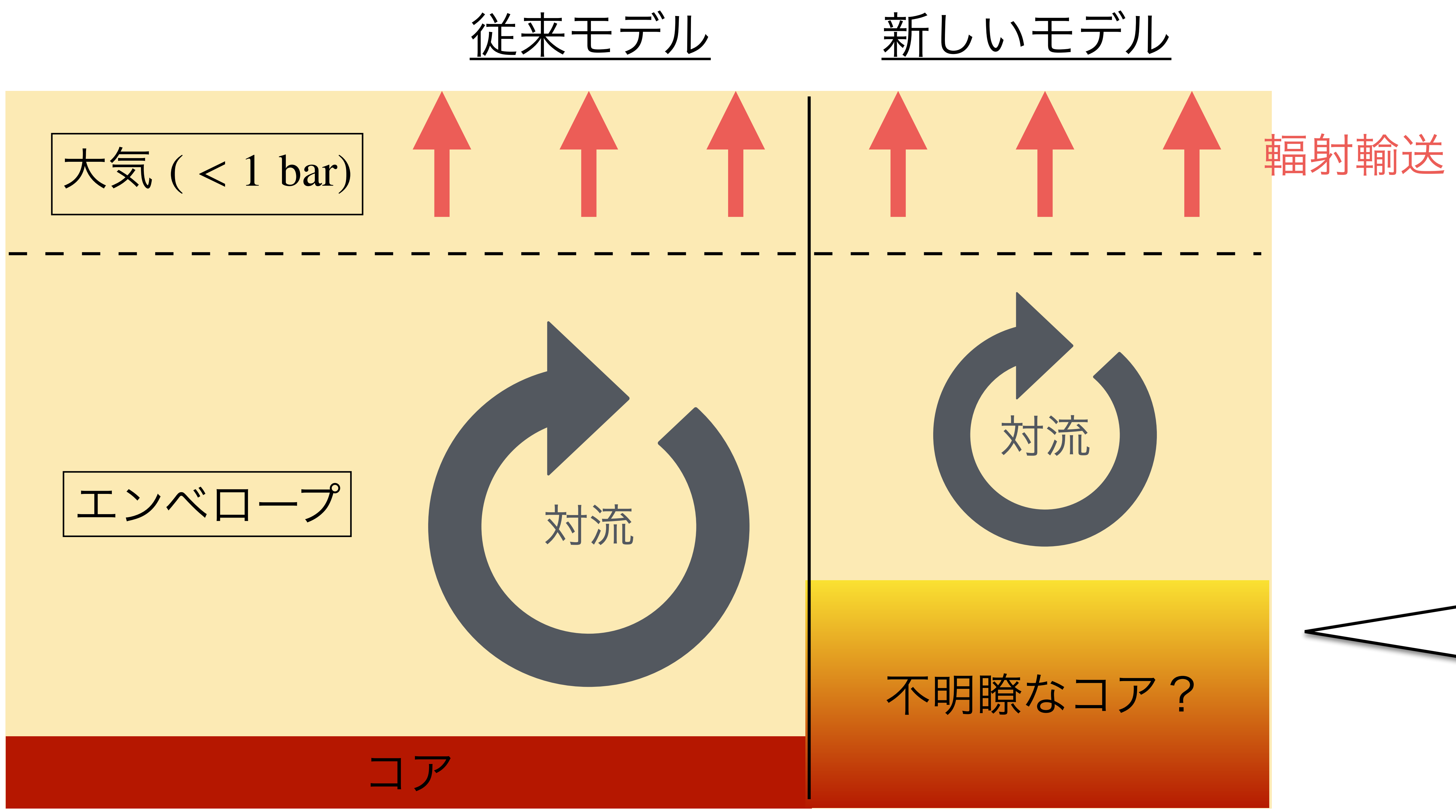
Junoの重力場測定を反映した内部構造モデル



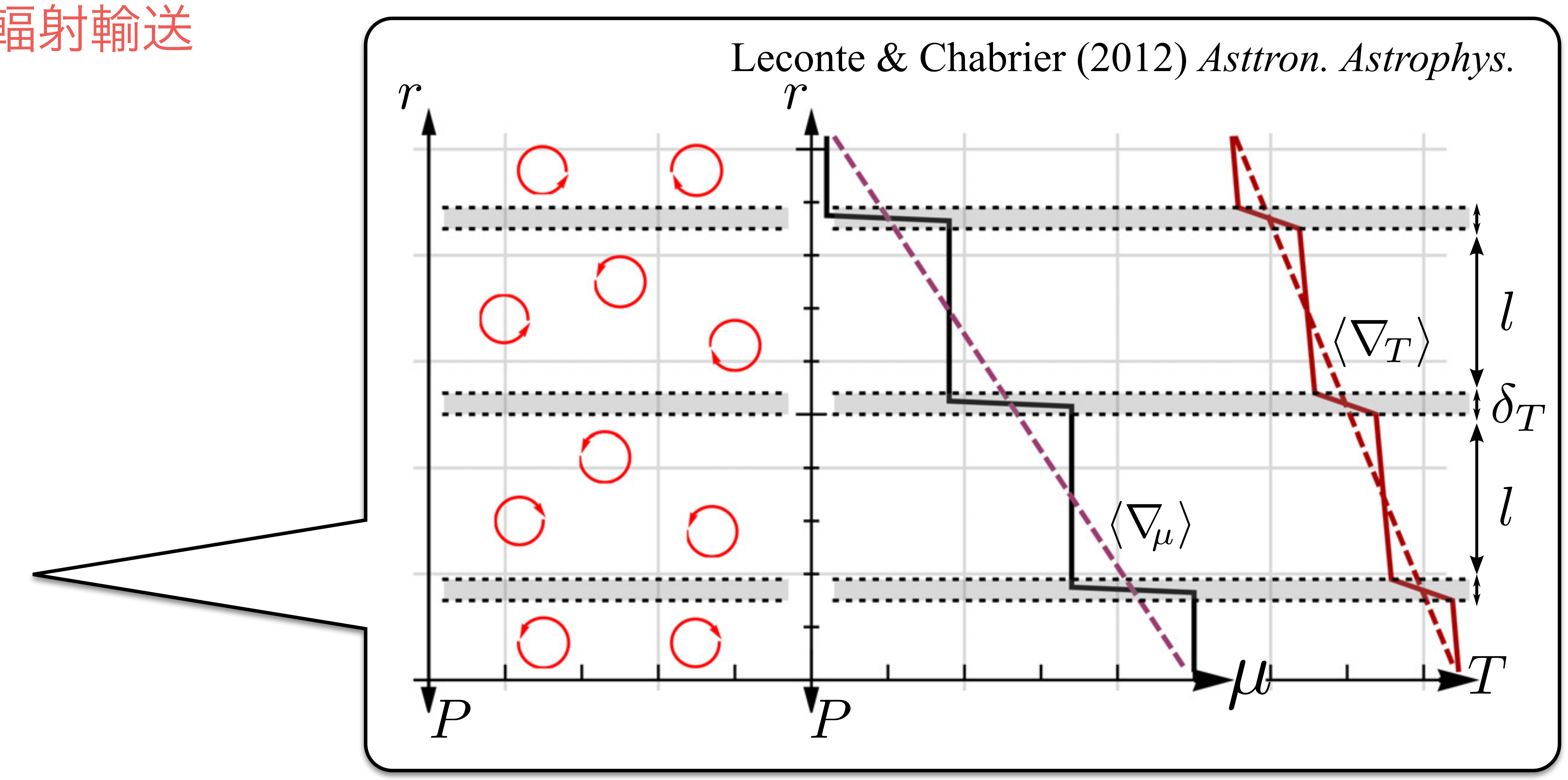
Wahl et al. (2017) *GRL;* Helled (2019) *Oxford Research Encyclopedia of Planetary Science*

- 大きいコアサイズ
- コアとエンベロープの境界は不明瞭かもしれない

巨大ガス惑星内部の対流



薄い対流層と拡散層が折り重なっている内部構造モデル



- 分化も混合もしない中途半端な構造はいかに維持されるのか？
- 対流不安定な温度構造 + 安定な組成構造 → 二重拡散対流？ (例：雪解け水の流れ込む海水)
- 理論的には，層構造の厚さは最小で $\sim 10^{-1} - 10^{1}$ m！ (Kurokawa & Inutsuka 2015, *Astrophys. J.*)

https://youtu.be/cNbMZTCH3S8

まとめ

- 3つの熱輸送メカニズム：輻射輸送・熱伝導・対流
- 対流発生の条件：レイリー数 $Ra \gg \sim 10^3$ (浮力が粘性力に打ち勝つ)
- 固体惑星の内部：熱境界層(熱伝導) + 対流層
- 惑星の熱源：集積時の熱 + 放射壊変熱
- 惑星の冷却 → ダイナモ磁場
- 巨大ガス惑星の冷却 → 天体サイズの収縮

レポート課題　(5/20 17時締切)

1. シュテファン=ボルツマンの法則に従い，地球表面から単位時間に放射される電磁波(赤外線)のエネルギー　[W]　を見積もれ　(有効数字1桁)．地球の平均気温は15°Cとする．地球の半径 $R_\oplus = 6.4 \times 10^6$ m を用いること．

2. 地球を構成している物質の比熱を $c_p = 1.0 \times 10^3$ J $\cdot$ kg$^{-1} \cdot$ K^{-1}，平均的温度を $T_{\rm av} = 2.0 \times 10^3$ K とする時，地球の全熱エネルギー [J]を見積もれ (有効数字1桁)．地球の半径 $M_\oplus = 6.0 \times 10^{24}$ kg を用いること．

3. 1の電磁波が全て地球の冷却に寄与するとした場合，地球が冷却しきるのにかかる時間を見積もれ (有効数字1桁)．また，計算した冷却時間を地球の年齢 45 億年と比較し，「現在でも地球内部はまだ暖かい」ことと整合的な結果となっているか，なっていない場合はなぜか考察せよ．