

粘性率の大きい流体中を落下する球の終端速度の導出

市川 浩樹

2017年4月21日

流体中を重力により落下する球の終端速度の見積もりについて記述する。その速度は次元解析により見当をつけることができ、雨粒の落下速度や熱対流中の熱の固まりの上昇（下降）速度などに応用することができる。また、粘性率が大きい流体中での解析解（ストークス速度）を導く。

1 次元解析による見積り

この文章では、流体中を自重で落下する球の速度を次元解析により見積り、それを理論や実験と比較する。半径 R 、密度 ρ_i の球が、密度 ρ_o 、粘性 η_o の無限に広がった流体中を一定の重力下で落下するとする。 $\rho_i > \rho_o$ ¹とし、十分時間がたったあとの定常状態での落下速度²を議論する。非圧縮流れの鉛直方向の流体方程式は以下のように書ける ($\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ 、 $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ 、 $\boldsymbol{u} = -g\boldsymbol{e}_z$ 、 \boldsymbol{e}_z は z 方向の単位ベクトル)。

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)w = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 w - \Delta \rho g \quad (1)$$

ただし、 $\Delta \rho = \rho - \rho_o$ とした。この方程式の圧力 p は静水圧 ($p_0 = -\rho_o z + \text{const.}$) からのずれを表している。この方程式の中で、球を加速するのは、最後の浮力項である。球に働く下向きの浮力を見積もると、 $\frac{4}{3}\pi R^3 \Delta \rho g$ である。浮力と釣り合う力（抵抗力）がなくては、球の速度は一定速度にならない。抵抗力として、三種類の力（慣性力（左辺）、圧力勾配（右辺第一項）、粘性力（右辺第二項））が考えられる。本節では慣性力と粘性力のみを球に働く主な抵抗力と、とりあえず考える。この問題では、代表的な圧力差が与えられているわけではなく、非圧縮流れでは圧力は非圧縮性を満たすように受動的に求められるので、ここでの次元解析

¹この節での次元解析に関しては、 $\rho_i < \rho_o$ である球の上昇速度にも適用できる。

²十分に時間がたった後では、加速も減速もしない定常状態に落ち着くとする。実際の現象でもほぼ一定速度になるのが観測される。

には使用しない。慣性力と粘性力が同等に効いてくる場合には次元解析が難しいので、慣性力が強い場合と、粘性力が強い場合とを分けて取り扱う。

慣性力と粘性力の大きさの比は無次元数であるレイノルズ数で見積もることができる。(1)式の左辺第二項と右辺第二項の比である。この系では、代表的長さは半径 R とするのが妥当であり、球の内側はとりあえず固体だと思っているので、球の外側の密度 ρ_o を密度のスケールとするのがよい。このときのレイノルズ数は、

$$Re = \frac{\rho_o U^2 / D}{\eta U / R^2} = \frac{\rho_o U R}{\eta} \quad (2)$$

となる。 $Re \ll 1$ のときは粘性力の効果が大きく、 $Re \gg 1$ のときは慣性力の効果が大きい。以下では、その二つの場合に分けて議論する。

粘性力が大きいとき レイノルズ数が小さいときは、粘性項と浮力項が釣り合う。

$$\frac{\eta U}{R^2} \sim \Delta \rho g \quad (3)$$

したがって、

$$U \sim \frac{R^2 \Delta \rho g}{\eta} \quad (4)$$

となる。レイノルズ数がゼロの場合は解析的に解かれていて³、

$$U = \frac{2}{9} \frac{R^2 \Delta \rho g}{\eta} \quad (5)$$

となることが知られている(第3節で解析的に求める)。この速度はストークス速度⁴と呼ばれている(参考文献[1])。この式から、小さなスケールのものは落下速度が遅いことがわかる。流体実験を行うときに流れを可視化する目的で、銀粉などの小さな粒子をばらまくことがある。小さな粒子は周囲の流体と密度差があっても、粘性力により、下に沈みにくく、流れにのって移動しやすい。

視点を変え、球の立場に立って、球に働く抵抗を考えてみる。速度 U の流体中に静止した球が置いてあるとする。このときの解析解は図1に表示してある。求めたいのは、球に働く粘性抵抗 F_v に対して $F_v = f(U)$ の形の式である。球に働く粘性抵抗⁵は球に働く浮力と釣り合っているので、

$$F_v = \frac{4}{3} \pi R^3 \Delta \rho g \quad (6)$$

³レイノルズ数がゼロのときは、慣性がないので、球に働く抵抗と浮力が瞬時に釣り合う

⁴ちなみに、二次元の流体に対してはストークス速度に対応するものは存在しない。このことはストークスのパラドックスと呼ばれている。この節の末尾にそれに対する証明を載せてある。しかしながら、実際の流体では、レイノルズ数はゼロではないし、無限大の広さの流体の中に一つの円筒が置いてある状況もない。次元解析の結果自体は二次元の流体でもそれなりに通用し、利用することができる。

⁵一般に $Re = 0$ での抵抗を粘性抵抗と呼んでいるが、 $Re = 0$ でも球の表面に直接働く力は粘性応力だけでなく、圧力も考慮する必要がある。

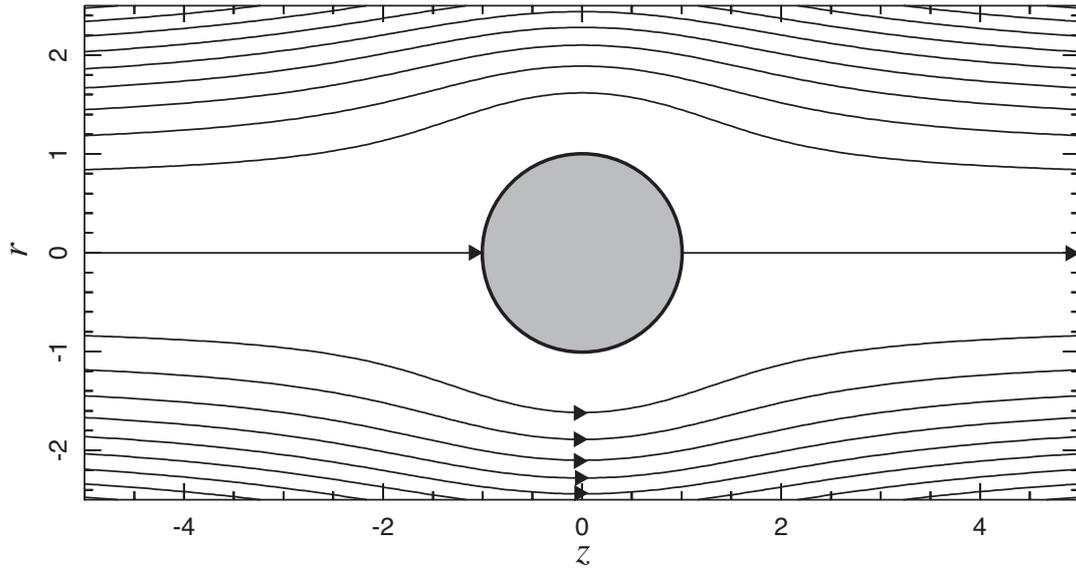


図 1: $Re = 0$ のときの一様流 U の中に $R = 1$ の球を置いたときの解析解。図の等値線は流線である。流線関数は円筒座標系 (r, θ, z) において、 $\Psi = \frac{1}{2}Ur^2 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^3 \right]$ で与えられる。この場合の円筒座標系での速度は、 $u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$, $u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$ で与えられる。

である。(5) 式を用いて、 $\Delta \rho g$ を消去し、 F_v を U の式にすると、

$$F_v = 6\pi\eta RU \quad (7)$$

となる⁶。粘性抵抗は、粘性率、流れの速度、および、球の半径に比例する。一見、粘性抵抗は球の表面に働くので、面積を表す R^2 に比例しそうに思える。しかしながら、球に働く粘性応力が $\sim \eta U/R$ なので、それに球の表面積 $4\pi R^2$ を掛けるので、結局 R の一乗に比例することがわかる。運動方程式から、 $F_v \sim$ (粘性項 (単位体積あたりの流体に働く粘性力)) \times (球の体積) を用いて、この形の式を以下のように次元解析で導くこともできる。

$$F_v \sim \frac{\eta U}{R^2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \sim \eta UR \quad (8)$$

慣性力が大きいとき 慣性力が大きい、すなわち、 $Re \gg 1$ のときは、粘性抵抗よりも慣性抵抗の方が重要になってくる。このとき、球の落下する速度は、慣性力と浮力の釣り合いから、

$$\frac{\rho_o U^2}{R} \sim \Delta \rho g \quad (9)$$

⁶球への粘性応力による抵抗は $\frac{2}{3}F_v$ で、残りの $\frac{1}{3}F_v$ は圧力差による抵抗である (第 3 節)。

と見積もられ、

$$U \sim \frac{\sqrt{R\Delta\rho g}}{\rho_o} \quad (10)$$

と予想される。また、慣性抵抗 F_i は、(慣性項) × (球の体積) より、

$$F_i \sim \frac{\rho_o U^2}{R} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \sim \rho_o U^2 R^2 \quad (11)$$

と見積もることができる。慣性抵抗が R^2 に比例するのは、球の表面に直接流体が衝突していることによる効果(球の衝突断面積に比例)を表している。例えば、単位時間に球に衝突するであろう流体の質量は $\sim \rho_o \times \pi R^2 \times U$ で見積もることができる。したがって、単位時間あたりにぶつかる運動量、すなわち力、は、 $\sim \rho_o U^2 R^2$ と見積もることができる。慣性抵抗と粘性抵抗の比はレイノルズ数になっており、慣性力が大きいときに慣性抵抗が大きいことになり、前提と矛盾していない。

実験により、慣性抵抗の大きさは詳細に調べられている⁷。抵抗力 F に対し、 $F = \frac{1}{2}C_d\rho_o U^2 A$ (A は衝突断面積。球の場合は $A = \pi R^2$) の形を仮定した場合の C_d (抵抗係数) の大きさは、レイノルズ数や球の表面の凹凸にも依存するが、おおむね 0.1~0.5 ぐらいのようである。抵抗係数はいろいろな形のものに対して計測されている。

粘性と慣性の抵抗力を単純化し、質量 m 、半径 R の剛体球の運動方程式を考えてみる。速度がゼロの状態から球を落とした場合の運動方程式は、球の速度 v が $v \leq 0$ であることを考慮して、

$$m \frac{dv}{dt} = -(m - m_0)g - aRv + bR^2v^2 \quad (12)$$

となる。ただし、 m_0 は周囲の流体が球と同じ体積を占めた場合の質量であり、 $a (> 0)$ 、 $b (> 0)$ は定数とする。右辺第二項が粘性抵抗で、第一項が慣性抵抗である。速度が小さいときは粘性抵抗が慣性抵抗に比べて大きいので、最初は粘性抵抗が効く。右辺が負の間は、速度が減少(速度の絶対値は上昇)しつつあるが、それと同時に抵抗も大きくなっていくので、右辺がゼロになる速度、すなわち、終端速度に収束する。

⁷粘性力をゼロとした渦なしのポテンシャル流れでは、流れ場の解析解を計算することができる。しかし、その解によると球に働く抵抗はゼロになる。その解析解は図1のような流れの上流と下流で対称な形(もちろん解自体は違う。)であり、上流から押される力と下流から押される力(この場合は球の表面に水平な方向に働く力である粘性力がないので、球の表面に垂直に働く圧力のみが球に直接働く力になる。)が等しく、合計するとゼロになる。このことは現実と比較すると変なので、ダランベールのパラドックスと呼ばれている。現実では、粘性項が大きな役割を果たすことによりこのパラドックスは生じない。高レイノルズ数では、物体の近傍では速度 u の変化が激しく、その結果として速度の二階微分である粘性力が支配的な力となる。この物体の近傍の粘性力が支配的な部分は粘性境界層と呼ばれる。

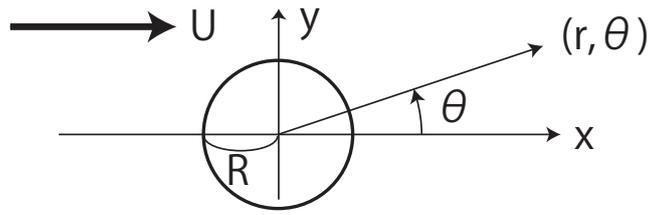


図 2: 二次元空間において一様流中に置かれた円。原点と円の中心が一致しており、流れ向きと x 軸の方向が一致している。 z 方向は紙面の裏から手前の方向である (右手系)。

2 円柱回り (二次元) の流れのストークス解の存在

三次元の球回りのストークス解を求める前に、二次元のストークス解について考察する。実は二次元の円柱回りのストークス解は存在しない。しかし、この節では、円柱回りのストークス解を求めるというスタンスに立って話を進める。二次元のストークス解を求める方法は三次元の場合と基本的に同じである。二次元では二次元極座標 (r, θ) (図 2) を使う。それに対し、三次元では三次元極座標 (r, θ, ϕ) を用い、流れの軸対称性から、 (r, θ) の二次元問題に変換する。式変形の手順はほとんど同じで、最後の結果が異なるだけである。

では、二次元のストークス速度を求めようとする。速度 U の一様流中に半径 R の円が原点に静止しているとする。このときの流れ場を求めることができれば、円に働く粘性力の合計を計算することができる。円の表面に働く応力を円の表面全体にわたって、積分をすればよいのである。流れの向きと x 軸の方向を一致させる。このとき、一様流は (x, y) 座標系で $(U, 0)$ と表される。 (x, y) 座標系に対し、極座標系 (r, θ) を次のように導入する。

$$x = r \cos \theta \quad (13)$$

$$y = r \sin \theta \quad (14)$$

連続の式 (非圧縮条件) と慣性項を落とした運動方程式は、それぞれ以下のよう
に書ける。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (16)$$

粘性率 η は定数とする。少々泥臭いが、この二つの式を極座標で成分ごとに書き

あらわしてみる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right\} \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \eta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} \quad (19)$$

これらの式はストークス方程式と呼ばれている。三つの式に対し、三つの未知量 $(u_r(r, \theta), u_\theta(r, \theta), p(r, \theta))$ がある。まず、圧力を消去するために、運動方程式に対して、 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ (r(19) 式) $- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ (18) 式を計算する。これは、円筒座標系 (r, θ, z) において、 $\nabla \times$ を運動方程式に左から作用させた結果の、 z 方向成分である。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\} \\ & - \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 u_r}{\partial \theta^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

これで未知量二つに対し、式が二つになった。次に、 u_r と u_θ をひとまとめにするために流れ関数 Ψ を導入する。

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (21)$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (22)$$

これを導入すると連続の式は自然に満たされる。後は (20) 式に流れ関数を導入して解けばいいだけである。(20) 式に流れ関数を導入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \theta^2 \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right\} \\ & - \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] \right) + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \theta^4} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \theta^2 \partial r} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となる。これで、 Ψ だけの式になった⁸。後は境界条件を満たすような Ψ を求めるだけである。

Ψ の境界条件を確認する。(23) 式は Ψ についての四階の微分方程式なので、四つ境界条件があると良さそうである。まず、無限遠 ($r \rightarrow \infty$) で、一様流となるの

⁸この式は円筒座標系で、 $\nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\Psi e_z) = 0$ と書くこともできる。ここで、 e_z は z 方向の単位ベクトルである。この式は、 $\mathbf{u} = \nabla \times (\Psi e_z)$ と、(20) 式は運動方程式に $\nabla \times$ を作用させたものの z 成分であり、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ が成り立つことから簡単にわかる。また、 $\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0$ と書くことができる。つまり、ラプラス方程式の四階微分バージョン (biharmonic equation) である。

で、速度は以下のように書ける。

$$u_r = U \cos \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (24)$$

$$u_\theta = -U \sin \theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (25)$$

したがって、 $\Psi \rightarrow Ur \sin \theta$ ($r \rightarrow \infty$) であることがわかる。次に、円の表面で速度がゼロになる条件を考える。これは、 $u_r(R, \theta) = u_\theta(R, \theta) = 0$ と書ける。合計で三つしか境界条件がないように見える。しかしながら、このあとに計算により出てくる解には無限遠で発散する解が含まれているので、それを除くとすれば、結果的に三つの境界条件で事足りる（もちろん、二次元の場合は解が存在しないのであるが、境界条件が少ないせいで解が存在しないわけではない。）

では、(23) 式を実際に解いてみようとする。(23) 式をよく見てみると、 θ については二階微分と四階微分しか存在しない。また、無限遠で、 $\Psi \rightarrow Ur \sin \theta$ となることから、 $\Psi(r, \theta) = f(r) \sin \theta$ の形を仮定すると良さそうである。流れ関数 $\Psi(r, \theta)$ は、 θ 方向には周期境界であるので、フーリエ展開をすることができる。したがって、 $\Psi = \sum_{n=1,2,3,\dots} (a_n(r) \sin n\theta + b_n(r) \cos n\theta) + c(r)$ の形をしているはずである。このうち、コサインの項は解の対称性から省かれる。流れは x 軸に対して対称であり、その結果、 Ψ は x 軸に対して奇関数であるからである。実際にコサインを(21) 式に代入してみるとそういう解が存在しないことがわかる。 $c(r)$ と $n = 1$ 以外のサイン関数については、結果論から言うと考慮する必要はない。このことは後で確かめる。

そういうわけで、 $\Psi(r, \theta) = f(r) \sin \theta$ の形の解を探してみる。これを代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{2}{r^2} f \right\} \\ & - \frac{1}{r} \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} f \right] \right) + \frac{2}{r^3} f - \frac{2}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

と r のみの式になる。この式を展開すると、

$$\frac{\partial^4 f}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{3}{r^4} f = 0 \quad (27)$$

となる。この微分方程式は $r = 0$ で確定特異点を持つ四階の微分方程式である。この式の場合は $f = r^n$ の形の解を仮定して代入することにより、方程式を満たす四つの n の組み合わせがでてくることが期待できる。したがって、 n に対して、

$$n(n-1)(n-2)(n-3) + 2n(n-1)(n-2) - 3n(n-1) + 3n - 3 = 0 \quad (28)$$

という四次方程式が得られる。因数分解をすると、

$$(n-1)^2(n+1)(n-3) = 0 \quad (29)$$

となる。重解が出てきたので、経験により、 $r \log r$ ($r > 0$) を微分方程式に代入してみると、これが解になっていることが確かめられる。よって、解の形は、

$$\Psi = \sin \theta \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^3 + Dr \log r \right) \quad (30)$$

と導かれた (A, B, C, D は定数)。無限遠での境界条件により、 $B = U$ と $C = 0$ 、 $D = 0$ となるので、

$$\Psi = \sin \theta \left(\frac{A}{r} + Ur \right) \quad (31)$$

である。このとき、

$$u_r = \cos \theta \left(\frac{A}{r^2} + U \right) \quad (32)$$

$$u_\theta = \sin \theta \left(\frac{A}{r^2} - U \right) \quad (33)$$

となり、これらの式では、 $r = R$ での境界条件である $u_r = u_\theta = 0$ を同時に満たすことはできない。これで、解がないということになるが、そもそも $\Psi(r, \theta) = f(r) \sin \theta$ と仮定したのが間違いかもしれない。そこで、もう少し考えてみる。例えば、 $\Psi = f(r) \sin \theta + g(r) \sin 2\theta$ を仮定して $g(r)$ の式を解いた結果、なんらかの解が出てきたとする。そのときの一般解は、

$$u_r = \left(\frac{A}{r^2} + U \right) \cos \theta + \frac{2}{r} g \cos 2\theta \quad (34)$$

$$u_\theta = \left(\frac{A}{r^2} - U \right) \sin \theta - \frac{\partial g}{\partial r} \sin 2\theta \quad (35)$$

となる。結局、 $r = R$ での速度をゼロにすることはできない。これは、他の $\sin n\theta$ ($n \neq 1$) の解や $\Psi = c(r)$ と仮定した解でも同様である。したがって、二次元の流体では解は存在しない。一方、次の節で説明する三次元の問題では、(29) 式に対応する方程式は重階を持たない。その四つの解のうち、無限遠で発散するのが一つ、無限遠で一様流に収束するのが一つである。したがって、残りの二つの自由度を用いて、速度の二つの成分を球面上でゼロにすることができる。

3 球回りの流れのストークス解

この節では、慣性力の無視できる極限 ($Re \ll 0$) での球の落下する速度 (ストークス速度) を求めてみる。座標系は球座標系 (r, θ, ϕ) を採用する。それぞれの成分は (x, y, z) 座標系と

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (36)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (37)$$

$$z = r \cos \theta \quad (38)$$

という関係で結ばれる。球は原点に静止しているとし、流れは z 軸の負の方向から正の方向へ向かっているとす。解き方は円柱の場合と同じである。今回は円柱の場合の経験をいかして、ベクトル解析の記号を多く用いて記述する。まず、流れ関数を導入する。連続の式は球座標系で、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta \sin \theta) = 0 \quad (39)$$

と書くことができる。ただし、対称性から $u_\phi = 0$ とした。同様に、 $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ も成り立つ。この式をよく眺めることにより、流れ関数 Ψ を

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (40)$$

$$u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (41)$$

と導入する。このとき、連続の式は自然に成り立つ。この二つの式と球座標系でのローテーションの公式⁹を見比べると、

$$\mathbf{u} = \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) \quad (45)$$

と書けることがわかる。

次に運動方程式を流れ関数を用いて表してみる。運動方程式

$$\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (46)$$

の両辺に $\nabla \times$ を作用させ、 $\nabla \times \nabla p = 0$ により圧力を消去する。

$$\nabla \times \nabla^2 \left[\nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) \right] = 0 \quad (47)$$

恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ に注意して、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を用いると、

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = 0 \quad (48)$$

となる。

⁹球座標系でのローテーションは以下のように書ける。

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (42)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) \right] \quad (43)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \quad (44)$$

参考 この式は $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ より、左の二つのローテーションは $-\nabla^2$ に変えることができる。また、 $\nabla \cdot \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi\right) = 0$, $\left(\leftarrow \frac{\partial}{\partial \phi} = 0\right)$ を考慮すると、右の二つのローテーションも $-\nabla^2$ に変えることができる。したがって、(48)式は

$$\nabla^2 \nabla^2 \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi\right) = 0 \quad (49)$$

と書くこともできる。□

この式をいきなり全部展開するのはややこしいので、一部から展開する。

$$\nabla \times \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi\right) = \nabla \times \mathbf{u} \quad (50)$$

$$= \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \quad (51)$$

$$= -\frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] \quad (52)$$

ここで、 $u_\phi = 0$ と $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ を用いた。都合の良いことに、 $-\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] = \Psi^*$ と置けば、 $\nabla \times \nabla \times$ を作用する前と同じ形になる ($\nabla \times \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi\right) = \frac{\Psi^*}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi$)。この演算では Ψ の特別な性質を使っていないことに注意したい。(45)式を使っているのではないかと思うかもしれないが、 \mathbf{u} は速度である必要はなく、(45)式から導かれるベクトルと思えばよい。そのベクトルの性質として、 $u_\phi = 0$ を使っただけである。そして、その性質は(45)式から導くことができる。したがって、

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi\right) = \frac{\mathbf{e}_\phi}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \Psi = 0 \quad (53)$$

となる。すなわち、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \Psi = 0 \quad (54)$$

が成り立つ。

この方程式を Ψ について解く。最初に境界条件を確認する。まず、球の表面 ($r = R$) で $\mathbf{u} = 0$ である。次に、無限遠で一様流 $\mathbf{u} = U \mathbf{e}_z$ の条件を流れ関数を使って書くと、($r \rightarrow \infty$) で、

$$u_r = U \cos \theta = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (55)$$

$$u_\theta = -U \sin \theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (56)$$

となる。したがって、無限遠で $\Psi \rightarrow \frac{U}{2}r^2 \sin^2 \theta$ となる。そこで、解の形を $\Psi = f(r) \sin^2 \theta$ と仮定して、(54) 式に代入する。

$$\frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f(r) \sin^2 \theta = -\frac{2}{r^2} f(r) \sin^2 \theta \quad (57)$$

となり、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \right] f(r) = 0 \quad (58)$$

となる。円柱周りの流れの場合と同様に、 $f = r^n$ の形の解を仮定して (58) 式に代入すると、

$$\{(n-2)(n-3)-2\} \{n(n-1)-2\} = (n+1)(n-1)(n-2)(n-4) = 0 \quad (59)$$

となる。したがって、

$$\Psi = \sin^2 \theta \left(\frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4 \right) \quad (60)$$

とおける (A, B, C, D は定数)。境界条件により、係数が決められる。無限遠で、 $\Psi \rightarrow \frac{U}{2}r^2 \sin^2 \theta$ なので、 $D = 0$ であり、 $C = U/2$ である。このとき、 u_r と u_θ は、

$$u_r = \cos \theta (2Ar^{-3} + 2Br^{-1} + U) \quad (61)$$

$$u_\theta = -\sin \theta (-Ar^{-3} + Br^{-1} + U) \quad (62)$$

$$(63)$$

となり、 $r = R$ で、それぞれがゼロになるので、

$$A = \frac{1}{4}UR^3, \quad B = -\frac{3}{4}UR \quad (64)$$

となる。つまり、

$$\Psi = U \sin^2 \theta \left(\frac{R^3}{4r} - \frac{3}{4}Rr + \frac{1}{2}r^2 \right) \quad (65)$$

である。このとき、球のまわりの流れは

$$u_r = U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} - \frac{3R}{2r} \right) \cos \theta \quad (66)$$

$$u_\theta = -U \left(1 - \frac{R^3}{4r^3} - \frac{3R}{4r} \right) \sin \theta \quad (67)$$

で与えられる。球周りの流れでは、円柱周りのときと異なり、解を求めることができた。次に、この解の性質を見ていく。

レイノルズ無限小の仮定の妥当性 仮定（慣性項 ≪ 粘性項）により慣性項を無視する近似が実際の系で正しいかどうかを確認するため、解のレイノルズ数（慣性項と粘性項の比）を計算してみる。一様流の速度 U と球の半径 R から計算されるレイノルズ数を Re 、ストークス解による慣性項と粘性項の比を Re^* とする。慣性項は例えば $\sim u_r \frac{\partial}{\partial r} u_r$ で見積もることができ、 $r \rightarrow \infty$ では $\sim U^2 R / r^2$ となる。粘性項は $\sim \nu \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_r$ で見積もることができ、 $r \rightarrow \infty$ で $\sim \nu U R / r^3$ となる。したがって、 $r \rightarrow \infty$ で $Re^* \sim Re \frac{r}{R}$ となる。すなわち、 $r \rightarrow \infty$ の点では、ストークス解は成り立たない。ストークス解が成り立つのは、球の周囲の Re^* が小さい領域だけである。実際の流れでは Re はゼロではないので、ストークス解は球から十分に遠いところを考える場合は成り立たない。

今度は円柱に対して同じことをやってみる。円柱の近くでは円柱の表面での境界条件を考えて、 $\Psi = \sin \theta \left(\frac{A}{r} + Br + Dr \log r \right)$ の形の解が成り立つと考えられる。 Cr^3 の項は $Dr \log r$ の項に比べて $r \rightarrow \infty$ で急激に増大するので省いた。この場合も三次元の球と同様に Re^* を見積もると、 $Re^* \sim Re \frac{r}{R} \log \frac{r}{R}$ となる。すなわち、三次元の場合よりも近距離でしか慣性力をゼロとする近似が成り立たない。

球に働く圧力 圧力場は r 方向の運動方程式から計算できる¹⁰。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta (\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_r = \frac{3\eta UR}{r^3} \cos \theta \quad (68)$$

導出過程で、 Ψ の r^1 の項だけ生き残って、圧力に効いていることに注意したい。 r について、 r から ∞ まで積分すると、

$$p = p_\infty(\theta) - \frac{3\eta UR}{2r^2} \cos \theta \quad (69)$$

と圧力を求めることができる。ここで、 $p_\infty(\theta)$ は無限遠での圧力である。球から遠く離れた地点では、圧力は一定である。したがって、 p_∞ は θ に依存しない。また、非圧縮流れでは、圧力の値そのものには意味はなく、圧力差にのみ意味があるだけなので、 p_∞ は単なる定数と思って良い。球の前面 ($(r, \theta) = (R, \pi)$) では圧力は最大値になり、背部 ($(r, \theta) = (R, 0)$) で最小値になる。

球にかかる圧力による z 成分の力を積分してみる。

$$F_p = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{3\eta UR}{2R^2} \cos^2 \theta - p_\infty \cos \theta \right] R^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad (70)$$

$$= \left[-\eta \pi UR \cos^3 \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \quad (71)$$

$$= 2\pi \eta UR \quad (72)$$

これは、ストークス抵抗全体の三分の一に対応する。このように、ストークス抵抗にも圧力による抵抗がふくまれている。

¹⁰ベクトル A に対し、ラプラシアン $\nabla^2 A$ の r 方向は、 $(\nabla^2 A)_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$ であり、 $\nabla^2 A_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \phi^2}$ を用いて計算した。

球の表面に働く粘性応力 粘性応力は $2\eta e_{ij}$ で与えられる。ここで、 e_{ij} は歪み速度テンソルである。歪み速度テンソルの極座標系での成分の表現はここでは割愛する。必要な部分だけ書き記す。球に働く応力は r に垂直な面を通して働く面積力であり、 $2\eta e_{ir}$ のみを取り扱うことになる。

まず、 r 方向の力 $2\eta e_{rr}$ は、

$$2\eta e_{rr}(R, \theta) = \eta \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \right]_{r=R} = 0 \quad (73)$$

となり、この項はゼロになる¹¹。

次に、 θ 方向の力 $2\eta e_{\theta r}$ は、

$$2\eta e_{\theta r}(R, \theta) = \eta \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]_{r=R} \quad (74)$$

$$= -\frac{3}{2}\eta U \sin \theta \left[\frac{R^3}{r^4} \right]_{r=R} \quad (75)$$

$$= -\frac{3\eta U}{2R} \sin \theta \quad (76)$$

となる。球に働く粘性応力の導出過程では、 Ψ の r^{-1} の項だけ生き残っていることに注意したい。粘性応力は球の側面が一番、絶対値が大きく、圧力の分布とは異なる。

粘性応力の z 方向成分を球面上で積分すると、

$$F_\eta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{3\eta U}{2R} \sin^2 \theta \right] R^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad (77)$$

$$= 4\pi\eta UR \quad (78)$$

となる。これは、ストークス抵抗全体の三分の二に対応する。

球に働く抵抗の総和であるストークス抵抗は冒頭で紹介したように、

$$F_v = F_\eta + F_p = 6\pi\eta UR \quad (79)$$

となる。ストークス速度は、 F_v と球に働く浮力を釣り合わせるにより導出できる。ストークス速度を利用して、流体の粘性率の測定をすることもできる。

球面上でフリースリップ条件の場合 液体の中の気泡の表面では接線方向の応力が非常に小さいと考えられる。これは、気体の粘性力 η が液体の η に比べて、非常に小さいからである。仮に、接線応力をゼロであると近似すると、フリースリッ

¹¹境界に垂直な方向の境界に働く粘性応力がゼロになるのは、非圧縮流れの粘性境界での性質である。球の表面の境界条件をフリースリップ条件にすると、この項はゼロにならない。

プ条件として扱うことができる。ここでは気泡に働く粘性抵抗（粘性応力による抵抗 + 圧力による抵抗）を計算する¹²。

フリースリップ条件は、 $2\eta e_{\theta r} = 0$ （接線応力がゼロ）、かつ、 $u_r = 0$ （ Ψ が一定）である。 $e_{\theta r}$ の計算では、結局 Ψ の r^{-1} の項のみが寄与するのであった。したがって、この場合は、 r^{-1} の項はゼロになる。よって、流れ関数は、

$$\Psi = \sin^2 \theta \left(Br + \frac{U}{2} r^2 \right) \quad (80)$$

の形であり（ B は定数）、 $r = R$ で、 $u_r = 0$ 、すなわち、 Ψ が一定値を取る（ Ψ の等値面が球面と一致する。）ので、

$$\Psi = U \sin^2 \theta \left(-\frac{1}{2} Rr + \frac{1}{2} r^2 \right) \quad (81)$$

となる。球の内部の流れの流れ関数を Ψ_{inside} とすると、中心で速度が無限大にならないことにより、

$$\Psi_{\text{inside}} = U \sin^2 \theta (Cr^2 + Dr^4) \quad (82)$$

とかける（ C 、 D は定数）。球面の境界条件は $u_r = 0$ と $(u_\theta)_{\text{inside}} = (u_\theta)_{\text{outside}}$ である。insideとoutsideはそれぞれ、内側と外側の量を指している。球内部の流れに対する $r = R$ での境界条件は粘着条件になることに注意が必要である。球面に働く接線応力は、外側の液体にとっては無視できる大きさであるが、内側の流体にとっては無視できない¹³。境界条件を考慮すると、内部の流れ関数は、

$$\Psi_{\text{inside}} = U \sin^2 \theta \left(-\frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{4R^2} r^4 \right) \quad (83)$$

となる。

球に働く圧力や粘性力は外側の流体の解から求められる。球に働く圧力は Ψ の r^1 の項だけ生き残るのであったので、粘性境界の場合と係数を比較することにより、圧力による抵抗が計算できる。

$$F_p = \frac{4}{3} \pi \eta UR \quad (84)$$

法線方向の粘性応力は、

$$2\eta e_{rr}(R, \theta) = \eta \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} \right]_{r=R} = -2\eta \frac{U}{R} \cos \theta \quad (85)$$

¹²気泡が球形を保っているのは、表面張力の影響である。表面張力係数が一様な場合、表面張力は気泡全体に対して、並進運動量を与えない。したがって、ここでは表面張力の効果を考えない。

¹³外側の流体の粘性率 η は大きいので、速度勾配が小さい場合でも、大きな接線応力を内側の流体に及ぼすことができる。それに対して、内側の流体の η は小さいので、速度の勾配は大きくなることはない。フリースリップ条件はその極限の場合に対応する。

であり、粘性力による抵抗 F_η は、

$$F_\eta = \frac{8}{3}\pi\eta UR \quad (86)$$

となる。総抵抗は、

$$F_v = F_\eta + F_p = 4\pi\eta UR \quad (87)$$

となる。粘着条件のときよりも小さい値であるが、オーダーは同じである。一般に、球の内部も流体の場合の粘性抵抗は、以下の式 (Hadamard-Rybczynski の解) で表される¹⁴。

$$F_v = 2\pi\eta UR \frac{2 + 3\kappa}{1 + \kappa} \quad (88)$$

ここで、 $\kappa = \frac{\eta_{\text{inside}}}{\eta_{\text{outside}}}$ である。粘着条件の解が $\kappa \rightarrow \infty$ に対応し、フリースリップ条件の解が $\kappa = 0$ に対応している。

ポテンシャル流れとの比較 ポテンシャル流れとは、非粘性流体かつ渦なし ($\omega = \nabla \times \mathbf{u} = 0$) の非圧縮流れである。一般に非粘性流体において、初期条件で渦度がなければ、その後もずっと渦度はゼロである。このことの説明は割愛する。この節で取り扱ってきた、粘性の強い流体とは正反対の概念である。ここでは、ポテンシャル流れの球回りの流れの結果と、ストークス流れの結果を見比べてみる。ここでの目的は、ただ見比べるだけである。

球回りのポテンシャル流れの簡単に紹介する。球回りの流れのような、軸対象の問題では、ストークス流れと同じく、流れ関数 Ψ を導入することができる。このとき、非圧縮流れの条件 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ は自然に満たされる。(45) 式を参考に、渦度に流れ関数を代入すると、

$$\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = -\nabla^2 \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) \quad (89)$$

一行目から二行目への変形には、恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を用いた。渦なしの条件により、流れ関数 Ψ に対し、以下のポアソン方程式が成り立つ。

$$\nabla^2 \left(\frac{\Psi}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\phi \right) = 0 \quad (90)$$

この式は、ストークス流れの (49) 式の二回微分バージョンになっている。ポテンシャル流れでの球の表面での境界条件は、球の表面で Ψ が一定になることである。

¹⁴この解は、 Ψ を球の表面でつなぐことで得られ、球の変形による効果を見逃している。球の表面での接続条件は $u_r = 0$ 、接線方向の速度 (u_θ) が連続、接線方向の応力 ($2\eta e_{\theta r}$) が連続、の三つである (詳しい式変形は参考文献 [2] に記述されている。)

これは、流れの向きが球の表面に沿っていることに対応する。粘性のある流れと違い、物体表面での境界条件が一つ少ないことに注意したい。

(90) 式の解は、無限遠での境界条件（一様流）から、 $\Psi = f(r) \sin^2 \theta$ と仮定して導かれる。導出過程はストークス流れと同じで、

$$\Psi = U \sin^2 \theta \left(-\frac{R^3}{2r} + \frac{1}{2}r^2 \right) \quad (91)$$

となる。一方、ストークス流れでは、

$$\Psi = U \sin^2 \theta \left(\frac{R^3}{4r} - \frac{3}{4}Rr + \frac{1}{2}r^2 \right) \quad (92)$$

である。一様流の項 r^2 は同じで、 r^{-1} の項は符号が異なる。また、ストークス流れでは、 r^1 の項が存在する。

参考文献

- [1] Stokes, G. G., On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Camb. Phil. Trans.*, 9, Part II, 8–106, 1851.
- [2] Batchelor, G. K., An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 1967

[1] には三次元の球の周囲のストークス解や二次元で解が存在しないことの証明などが記述されている。